



ASTRONOMÍA PARA INGENIEROS INQUIETOS

CÁLCULOS ASTRONÓMICOS CLÁSICOS

Este documento es de uso único e intransferible para el alumno matriculado en el curso. Cualquier reproducción física o digital del documento sin permiso de los autores vulnera los derechos de propiedad intelectual de los mismos.

A decorative graphic at the bottom of the page consisting of numerous thin, light gray lines that curve and flow from the left side towards the right, creating a sense of movement and depth.

INDICE

INDICE.....	3
2. INTRODUCCIÓN.....	4
3. LOS GRANDES SABIOS GRIEGOS.....	5
4. CÁLCULO DEL RADIO DE LA TIERRA POR ERATÓSTENES.....	13
5. CÁLCULO DE LA OBLICUIDAD DE LA ECLÍPTICA POR ERATÓSTENES.....	16
6. CÁLCULO DE LA DISTANCIA DE LA TIERRA AL SOL POR ARISTARCO DE SAMOS.....	17
7. CÁLCULO DE LA DISTANCIA DE LA TIERRA Y LA LUNA POR HIPARCO DE NICEA.....	19
8. CÁLCULO DE LA PRECESIÓN DE LOS EQUINOCCIOS POR HIPARCO.....	22
9. CÁLCULO DE LA DISTANCIA DE LA LUNA POR PARALAJE.....	23

2. INTRODUCCIÓN

Con todo lo aprendido ya estamos en condiciones de conocer cómo los antiguos sabios pudieron realizar cálculos tan acertados de las principales dimensiones astronómicas.

Pero antes de entrar en este conocimiento astronómico me parece importante dedicar un poco de tiempo a explicar cómo fue posible semejante revolución científica.

3. LOS GRANDES SABIOS GRIEGOS

La Grecia clásica tiene su apogeo en el siglo de Pericles (época de Sócrates), es decir, en el siglo V a.d.C. Tras la Guerra del Peloponeso las ciudades griegas se debilitan y Alejandro Magno las conquista y extiende su imperio hasta la India. Su increíble hazaña cambió el mundo y tras su muerte se inicia una nueva época llamada Helenismo. Los grandes sabios de los que vamos a hablar ahora no son, por tanto, de la época de la Grecia Clásica (a excepción de Anaxágoras), si no del helenismo, que comienza tras la muerte de Alejandro en el año 323 a.d.C. Varios factores provocan un auténtico florecer de cultura y la ciencia:

- Con la extensión del imperio de Alejandro se establece un estrecho contacto con la sabiduría egipcia, mesopotámica y oriental.
- El dominio de los territorios favorece el transporte, el comercio, y con ello, el intercambio de ideas.
- La influencia de Aristóteles en Alejandro Magno y sus compañeros parece haber sido decisiva. Ellos reinarán en los diferentes territorios del imperio y se preocuparán especialmente por las artes y la ciencia.
- Muy especialmente cabe destacar la Biblioteca de Alejandría que fundó Ptolomeo, quien reinó en Egipto a la muerte de Alejandro.

Por tanto, en realidad, los ingeniosos astrónomos de esta época, aunque se les llama griegos, no nacieron en Grecia sino en Alejandría, Samos, Sicilia, Nicea (Asia Menor), etc....

Antes de entrar en el detalle de cada uno de los genios de la astronomía griega, merece la pena hacer una breve reflexión de cómo **la confianza en la posibilidad del desarrollo científico** fue trasmitiéndose de sabio a sabio. Sorprenderá ver que se forma una cadena ininterrumpida de grandes personajes históricos.

Todo comienza con el asombro de los primeros filósofos griegos ante la existencia de un ORDEN (un COSMOS) en la naturaleza. ¡Parece haber unas leyes y una razón que guía a la propia naturaleza! ¿Por qué no hay CAOS (desorden) en la naturaleza? ¿Quién la gobierna para que todo parezca ordenado?

Anaxágoras (500-428 a.d.C) Considera que hay una RAZON (un Nous) que lo inunda todo, y que lo gobierna todo. Algo de ese NOUZ está también en el hombre. La existencia de esta RAZON es la que permite al hombre entender la naturaleza y que sea posible un

“Conocimiento científico”. Discípulos de Anaxágoras serán Pericles, Tucídides, Eurípides, y el propio Sócrates.

Sócrates (470-399 a.d.C) lucha contra el relativismo de la época (sofistas) y su discípulo **Platón** (427- 347 a.d.C) defenderá la posibilidad de adquirir un verdadero conocimiento científico, considerando que el hombre es capaz de alcanzar a conocer las ideas (conceptos universales). Pero será su discípulo **Aristóteles** (384-322 a.d.C) quien estructurará todo el sistema y el proceso lógico en el que se basará el desarrollo de la ciencia durante dos milenios. Convencido de la posibilidad de que el hombre es capaz de adquirir conocimiento científico desarrolló la ciencia de la física, la biología, la medicina, etc.... Su pupilo será el mismísimo **Alejandro Magno** quien imbuido de estas ideas fundará Alejandría con el sueño de convertirla en el centro universal del conocimiento. Sueño que completaría su compañero y amigo **Ptolomeo** fundador de la dinastía Ptolemáica en Egipto.

La Biblioteca de Alejandría será durante muchos siglos foro de encuentro de todas las ideas y conocimientos del mundo. Aquí vendrán los grandes sabios de la antigüedad a leer, debatir e investigar.

Por tanto, los griegos plantearon la existencia de un NOUS (RAZON) que gobernaba el mundo y parte de ese mismo NOUS (RAZON) estaba dentro del hombre. Esto explicaba por qué existían leyes ahí fuera en la naturaleza y por qué la naturaleza parecía comportarse de modo matemático, y por qué el hombre era capaz de entenderlo (y adquirir así conocimiento universal). En la edad media hubo un debate intensísimo acerca de la posibilidad o no de estos “conocimientos universales”, que acabó siendo estéril. La ciencia moderna finalmente terminó por aceptar que es posible adquirir **conocimiento universal** a partir de la experiencia. Y también aceptó que los acontecimientos del universo suceden de acuerdo a unas **leyes inmutables y matemáticas** que es posible y preciso descubrir. Esta "radical, fanática y ciega" aceptación, que no está basada en ningún NOUS ni nada similar, le ha permitido evolucionar hasta los inmensos progresos del siglo XXI. Pero la ciencia ya no se plantea las siguientes preguntas ¿Por qué existen esas leyes ahí fuera?, ¿Quién o qué las puso ahí y por qué la naturaleza las obedece?, ¿Por qué la naturaleza parece comportarse de forma matemática?, ¿Por qué el científico da por hecho que acabará encontrando una LEY matemática en el fenómeno que está investigando? ¿Por qué la mente del hombre parece estar "diseñada" para ser capaz de entender esas mismas matemáticas y esas mismas leyes que están ahí fuera? Simplemente funciona el método, y eso le basta a la ciencia. Aun así, deberíamos plantearnos de vez en cuando ¿Por qué funciona? ¿No es sorprendente?



Figura 1: Biblioteca de Alejandría. El centro de investigación de más influencia de la historia universal.

Mencionemos brevemente los principales genios de la astronomía en la antigüedad. Veréis que casi todos ellos, a excepción de Anaxágoras, estuvieron íntimamente relacionados con la Biblioteca de Alejandría:

Anaxágoras (500-428 a.d.C.)

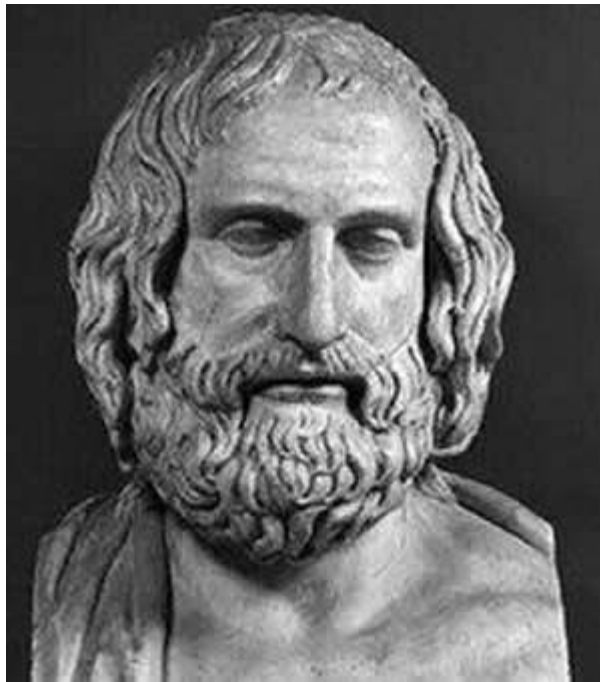


Figura 2: Anaxágoras.

Nació en una ciudad de la actual Turquía y se trasladó a Atenas. Entre sus discípulos cabe mencionar a Pericles, Tucídides, Eurípides y Sócrates.

A Anaxágoras se le atribuyen las primeras explicaciones racionales de los eclipses (*“el eclipse solar se produce al interponerse la Luna entre la Tierra y el Sol. Y el eclipse de Luna se produce por interponerse la Tierra entre la Luna y el Sol”*)

Enseñó en Atenas hasta ser acusado de impiedad por sugerir que el sol era una masa de hierro incandescente, y la Luna era una roca que reflejaba la luz del sol, y quizás esté habitada.

Aristarco de Samos (310-230 a.d.C.)

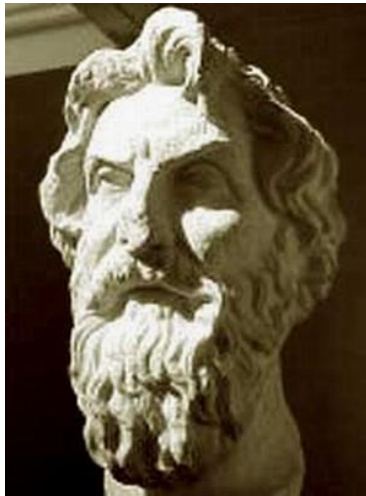


Figura 3: Aristarco de Samos.

Aristarco, nacido en la ciudad griega de Samos, fue de los primeros científicos en aprovechar los grandes recursos de la emblemática Biblioteca de Alejandría.

Sus grandes logros fueron:

- Proponer la hipótesis del sistema heliocéntrico (*“es posible que la tierra gire alrededor del sol”*)

- Calcular la distancia del sol a la tierra
- Fue el primero en considerar que las estrellas estaban infinitamente lejos
- El primero en sugerir un tamaño para el sol

Eratóstenes (276-194 a.d.C.)



Figura 4: Eratóstenes.

Estudió en Alejandría y Atenas. Fue gran amigo de Arquímedes (de Siracusa, Sicilia) y fue el Director responsable de la Biblioteca de Alejandría hasta su muerte. Entre sus grandes logros hay que mencionar:

- Invención de la esfera armilar
- Cálculo del radio de la tierra
- Cálculo de la inclinación del eje de la tierra respecto al plano de la eclíptica
- Cálculo de la distancia al sol
- Cálculo de la distancia de la luna
- Cálculo del radio del sol
- Realiza el primer mapamundi

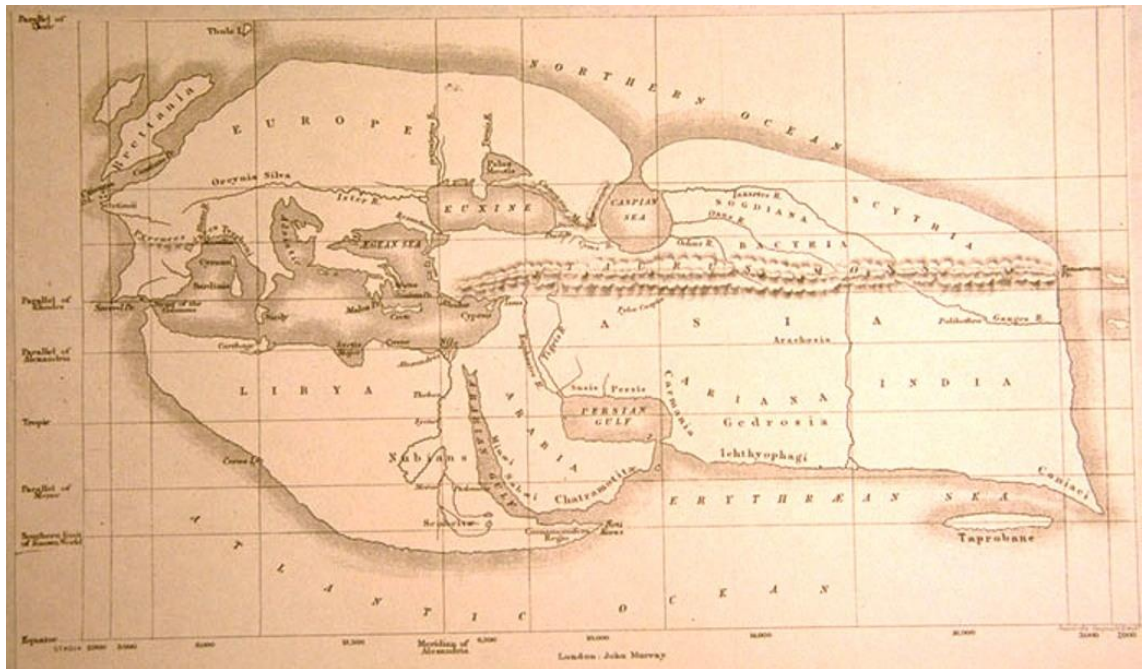


Figura 5: Mapamundi de Eratóstenes.

Hiparco de Nicea (Nicea, 190 a. C.- 120 a. C.)



Figura 6: Hiparco de Nicea.

También un astrónomo griego, pero nacido en Nicea (Asia Menor) en la época helenística. Al igual que los anteriores, también trabajó en Alejandría entre los años 161 y 127 a. C. Entre sus aportaciones cabe destacar:

- El primer catálogo de estrellas, motivado por la aparición repentina de una nueva estrella (nova escorpii)
- El descubrimiento de la precesión de los equinoccios
- Distancia entre la tierra y la luna
- Cálculo de la oblicuidad de la eclíptica
- Invención de los conceptos de longitud y latitud geográficas.

Otros grandes sabios que revolucionaron la ciencia universal en Alejandría fueron:

- Arquímedes (287 a.d.C.- 212 a.d.C.) Uno de los científicos más importantes de la historia universal. Estudió en Alejandría y murió en las guerras púnicas en la conflagración bélica entre Cartago y Roma cuando esta última invadió Sicilia. Calculó de manera precisa el número Pi, entre otros muchos descubrimientos matemáticos. Es famoso por el principio que lleva su nombre “todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso del volumen desalojado”
- Apolonio (262 a.d.C – 190 a.d.C). Trabajó en Alejandría hasta su muerte. Fue el gran matemático y geómetra que definió y calculó las propiedades de las curvas cónicas (elipse, parábola, hipérbola), trabajo que resultaría fundamental para Newton y Kepler ¡2,000 años después!
- Sosígenes (Siglo I a.d.C.). Trabajó en Alejandría en tiempos de Julio César. Gran astrónomo que logró calcular la duración casi exacta del año (365, 25 días). La reforma del calendario que realizó Julio Cesar se basó en estos cálculos, calendario que estaría vigente en todo el mundo occidental hasta el siglo XVI cuando se corrigió y sustituyó por el calendario gregoriano.

- Ptolomeo (Siglo II d.C.). Trabajó en Alejandría hasta su muerte. Escribió el famosísimo “Almagesto” que serviría para predecir el movimiento de los astros durante 1,500 años. A partir de todo el histórico de datos astronómicos que tenía a su disposición en la Biblioteca de Alejandría, logró construir un modelo matemático que lograra encajar con los datos históricos y predecir los movimientos futuros de los astros. Este modelo se inspiró en el esquema griego clásico donde la Tierra se encontraba en el centro del mundo, por eso propuso esferas complicadas que giraban en torno a ella hasta lograr cuadrar las medidas registradas con las del modelo.

4. CÁLCULO DEL RADIO DE LA TIERRA POR ERATÓSTENES

Eratóstenes conocía los métodos de cálculo de latitud que hemos estudiado. Por supuesto sabía perfectamente que la tierra era redonda. La pregunta es ¿cuánto medía la tierra?

El método fue realmente ingenioso. Al parecer este gran astrónomo tuvo la oportunidad de saber (probablemente por papiros egipcios guardados en la biblioteca de Alejandría) que en un punto muy cercano a Syene (hoy Asuán), el 21 de Junio el sol estaba situado totalmente en el cenit a las 12:00 de la mañana. En efecto, la latitud de Syene es $24,09''$ y en aquella época, debido a que el eje estaba un poco más inclinado se encontraba solo a 45 km del trópico de Cáncer. En este punto, como hemos visto, el 21 de Junio el sol se sitúa vertical justo en el medio día. La prueba debía ser que el agua del fondo del pozo situado en ese lugar quedara iluminada por el sol.

En el mismo día 21 de Junio Eratóstenes en Alejandría mediría al medio día la sombra que proyecta un palo. Midiendo la longitud de la sombra y del palo se calcula el ángulo de inclinación del rayo y resultó ser de $7,5^\circ$.

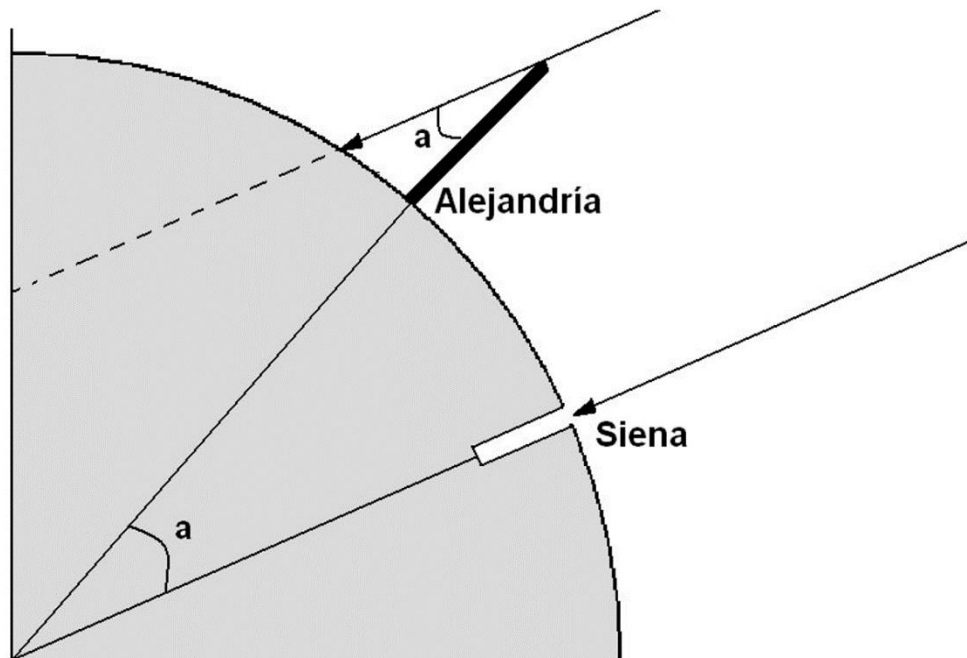


Figura 7

A partir de los cálculos tradicionales (en función del tiempo que tardó en recorrer esa distancia andando o navegando) consiguió calcular la distancia, de manera aproximada, que había que recorrer para llegar desde Asuán hasta Alejandría.

La distancia que él suponía que había entre ambos lugares era de 964 Km.

Por cálculos trigonométricos evidentes, él sabía que la relación de esa distancia con el radio de la tierra R era esta

$$964 \text{ Km} = (7,5/360) \times 2\pi R$$

$$\text{Calculó el Radio de la Tierra } R = 964 \times 360 / (7,5 \times 2\pi) = 7,374 \text{ Km}$$

Es decir, cometió un error del 15%, pues el real es de 6,370 Km.

Obviando el hecho de que la Tierra está achatada por los polos (lo que daría un error del 1,6%) el procedimiento es correcto pero cometió los siguientes fallos:

- La distancia más corta entre ambos lugares es en realidad de 845 km. Sin embargo la ruta por el río Nilo entre ambos lugares es de 1,067 km, una distancia similar a la que Eratóstenes propuso.

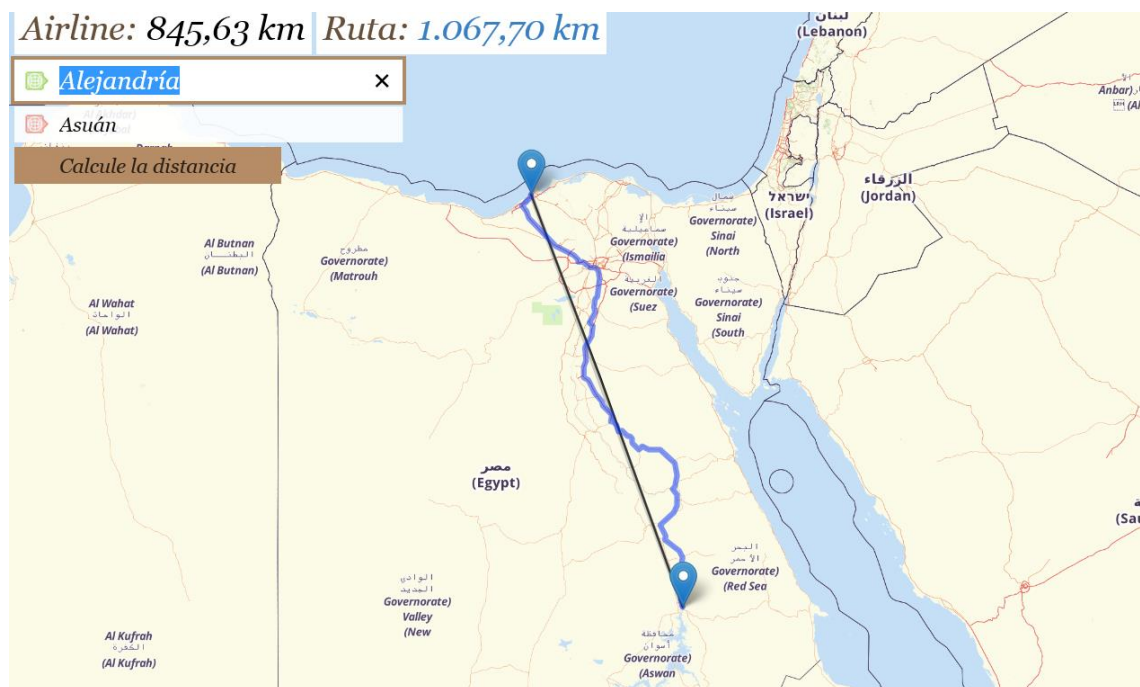


Figura 8

- Otro error, aunque menor, es debido a que Asuán no se haya exactamente en el mismo meridiano que Alejandría, sino un poquito más al Este.
- La medición del ángulo de la sombra que le salió es de $7,5^\circ$ pero en realidad era de $7,2^\circ$.
- En realidad, el cálculo del radio de la Tierra podría también haberse medido entre cualquier pareja de puntos que estuvieran en el mismo meridiano, simplemente mirando a la estrella polar y calculando la latitud de cada uno de ellos. Una vez medida la distancia entre ambos puntos se podría haber calculado el radio de la Tierra con la misma fórmula que la utilizada por Eratóstenes. Sin embargo el método de Eratóstenes tenía la siguiente ventaja:
- La medición de los ángulos es mucho más precisa con su método que con un rudimentario sextante. La medición que hace en Asuán es exacta con el ingenioso método del pozo. Y la medición que hace del ángulo de inclinación del rayo solar en Alejandría es casi exacta con el método de la sombra del palo.
- Cuenta con la singular ayuda de un río navegable que circula prácticamente de Sur a Norte.

Lamentablemente los valores calculados por Eratóstenes para el radio de la Tierra no prevalecieron porque en el 100 a.d.C. aproximadamente otro astrónomo griego Posidonio de Apamea calculó el radio de la tierra en un valor que era casi la mitad. Este fue el valor que se consideró válido durante la Edad Media y el que convenció a Colón para realizar su travesía (de haber conocido o aceptado el valor propuesto por Eratóstenes muy probablemente no se habría animado).

5. CÁLCULO DE LA OBLICUIDAD DE LA ECLÍPTICA POR ERATÓSTENES

Con todo lo conocido, es fácil calcular la oblicuidad de la eclíptica. Sabemos que la declinación del sol el día del solsticio de verano es el valor de la oblicuidad de la eclíptica.

Y además sabemos que en el solsticio de verano el sol alcanza una altura máxima que es igual a $90^\circ - \text{Latitud} + \text{Declinación}$.

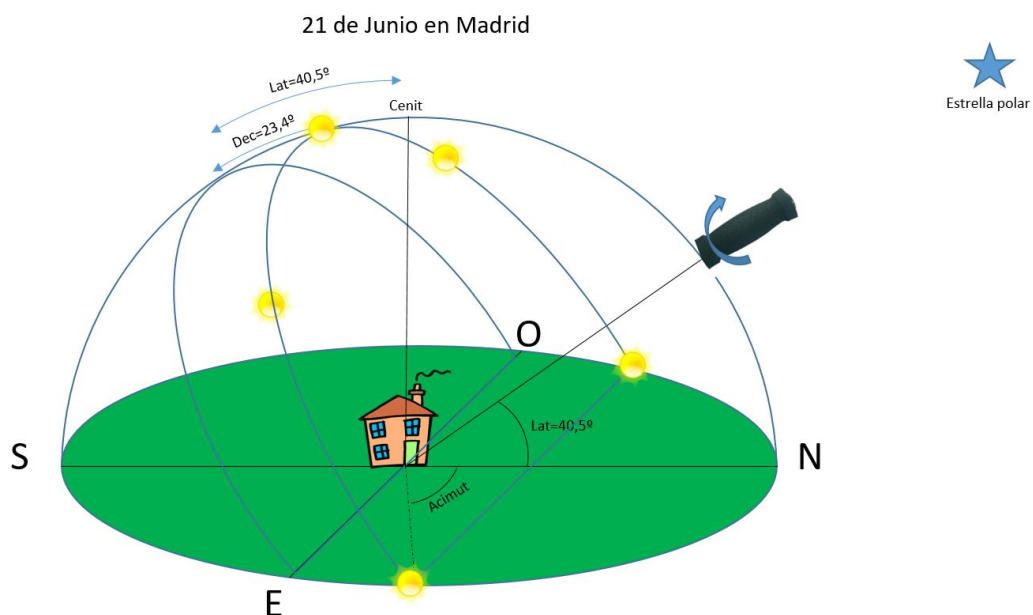


Figura 9

Basta por tanto con medir la altura máxima del sol en el solsticio de verano y, conociendo la latitud, hallar el valor de su declinación, que será el valor de la oblicuidad de la eclíptica.

También se puede medir la altura máxima del sol en el solsticio de verano, y la del solsticio de invierno, restarlas, y el resultado dividirlo entre dos. De esta manera no es necesario conocer la latitud.

Erastóstenes obtuvo un valor de $23^\circ 51'$, un valor realmente cercano al real, especialmente si consideramos que hace 2,300 años la inclinación del eje era mayor que ahora (hoy es de $23,4^\circ$).

6. CÁLCULO DE LA DISTANCIA DE LA TIERRA AL SOL POR ARISTARCO DE SAMOS

El método que utiliza Aristarco de Samos para el cálculo de la distancia de la tierra a sol es realmente ingenioso. Un día en que la luna está en cuarto creciente, podemos ver al sol y la luna al atardecer, como sucede en el esquema de abajo.

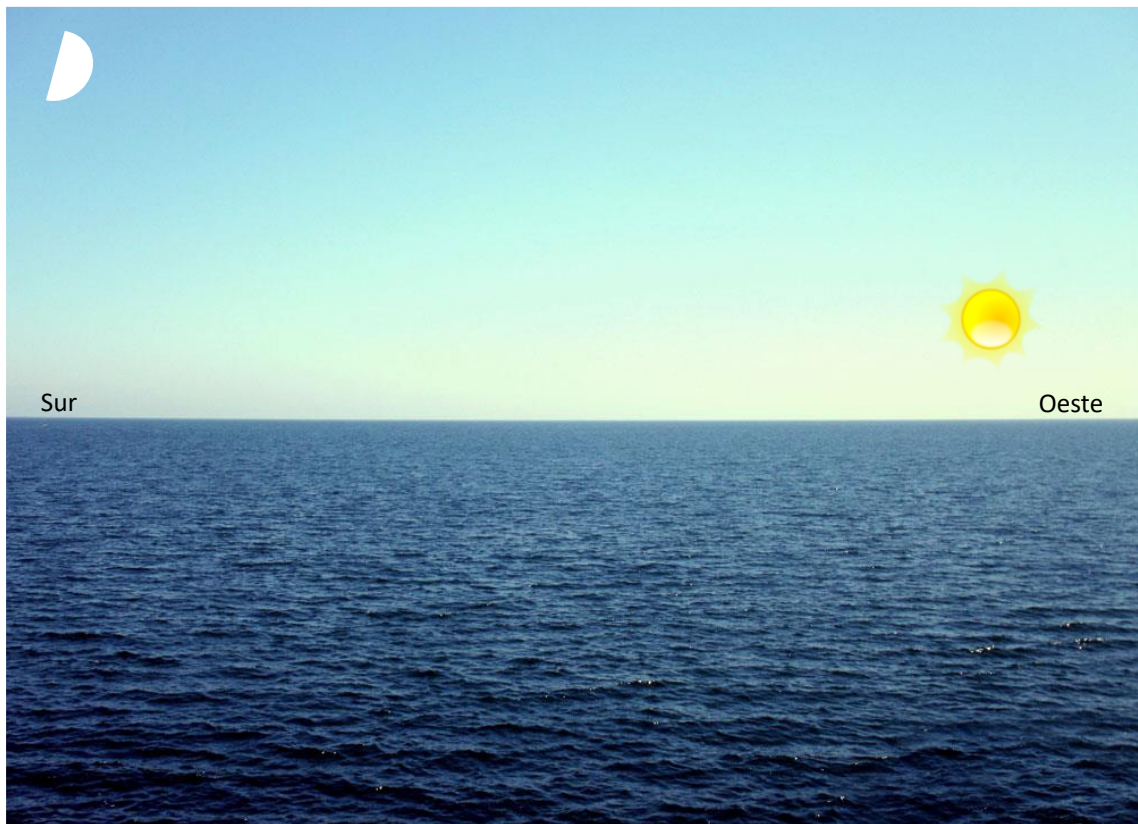


Figura 10

El espectador, la luna y el sol forman un triángulo. La forma de la luna (justo cuarto creciente) es testigo de que el ángulo del triángulo en el vértice que ocupa la luna es un ángulo recto perfecto.

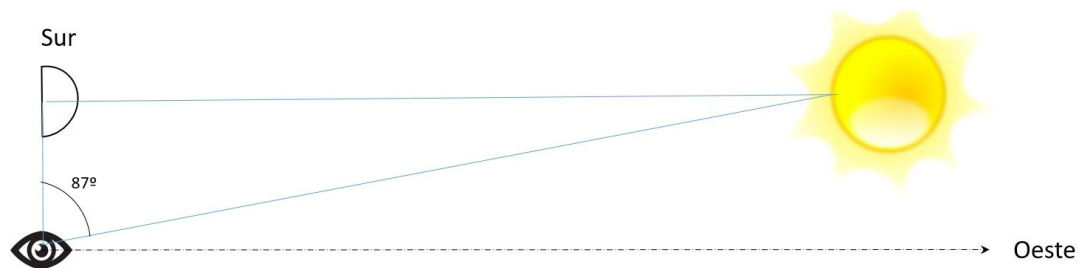


Figura 11

Aristarco midió el ángulo que formaba su visual con la luna y su visual con el sol y resultó un ángulo de 87° . Esto quiere decir que la distancia del espectador a la luna dividido entre la distancia al sol es igual al $\cos 87^\circ = 0,05$

Es decir, el sol debía de estar 20 veces más lejos que la luna y tener un diámetro 20 veces superior (pues se ven del mismo tamaño).

Evidentemente se equivocó porque es 400 veces superior, pero fue el primero en sugerir que el sol es enorme y que se encuentra muy lejos.

El error no estuvo en el método, que es correcto, sino en el cálculo del ángulo que forman la luna y el sol en ese momento, que no es nada fácil medirlo con los instrumentos de la época, puesto que es muy cercano a 90° y cualquier diferencia de minutos de grados puede suponer resultados totalmente disparatados. Por tanto este procedimiento no es el adecuado para calcular la distancia del sol, con los medios de que se disponía.

Peor lo que sí es evidente que quería demostrar Aristarco, y lo consiguió sobradamente, es que el sol se encontraba muy muy lejos. El hizo numerosas mediciones para asegurarse de que ese ángulo era, como mínimo, de 87° , y muy probablemente muy, muy cercano a 90° , lo cual alejaba el sol a distancias inmensas.

Y sobre todo, la idea de un sol tan grande sería la que le sugirió la posibilidad de que todo giraba alrededor de este astro rey.

7. CÁLCULO DE LA DISTANCIA DE LA TIERRA Y LA LUNA POR HIPARCO DE NICEA

El método fue sugerido años antes por Aristarco de Samos. Durante un eclipse de luna de duración máxima, la sombra de la tierra se proyecta sobre la luna. Esa sombra resulta formar un círculo mucho más grande que la propia luna. Él consideró que si medimos el tamaño de ese círculo y lo comparamos con el tamaño de la luna, podemos calcular cuántas veces es más grande la tierra que la luna.

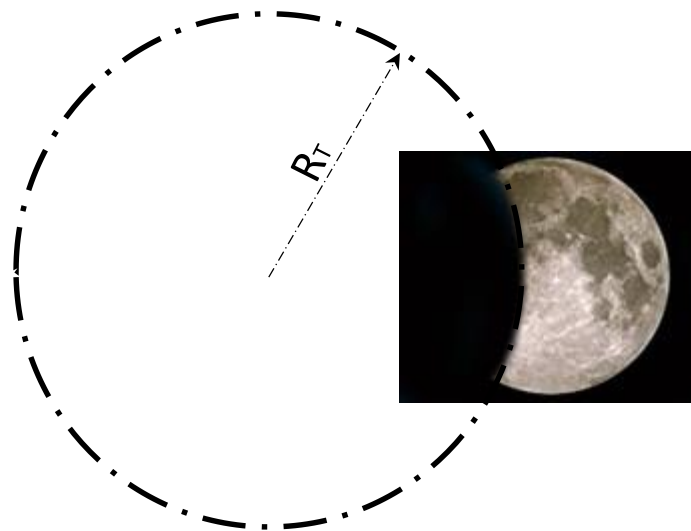


Figura 12

A él le salió que la sombra de la tierra era 3,7 veces superior, y por tanto, dado que el radio de la tierra según Eratóstenes era de 7,374Km, el de la luna debía de ser 1,992 Km. En realidad es de 1,737, falló por poco.

La relación real entre el radio de la tierra y el de la luna es de 3,64, muy próxima a lo propuesto por Hiparco. Sin embargo tuvo suerte. Hay que considerar que la sombra que la tierra proyecta sobre la luna es un poco más pequeña que la tierra, como se ve en el dibujo.

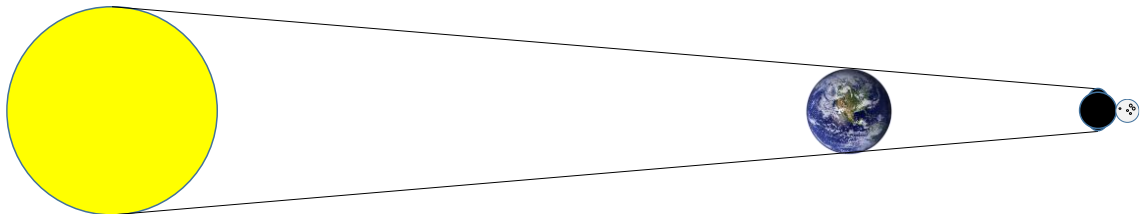


Figura 13

La relación entre el radio de la sombra de la tierra y el radio de la luna, como se calcula a continuación, es de 2,7 y no 3,7:

	Radio de la luna	1.737
	Radio del sol	695.700
	Distancia de la luna	381.000
	Distancia del sol	149.601.423
	Radio de la tierra	6.370
A	Radio sol- Radio tierra	689.330
B	Dist soltierra	149.601.423
	A/B	0,004608
C	Dist tierraluna - radioluna	379.263
D	(A/B)*C	1.748
	Radio de la sombra de la tierra en la luna	4.622
	Radio sombra de la tierra / radio luna	2,7

Dado que la distancia del sol a la tierra no era conocida hasta entonces, era imposible que por este procedimiento pudiera calcular de manera exacta la relación entre el tamaño de la tierra y de la luna. Sin embargo sí que pudo demostrar fácilmente que la tierra era considerablemente más grande que la luna.

Conocido el diámetro de la luna, que a él le salió de 3,984 Km, era fácil calcular la distancia de la luna a la tierra por el tamaño aparente. Midió el ángulo de la luna desde la tierra. Si lo midió bien le salió 0,531 grados.

$$\text{Diamluna} = (\text{Distluna} - R_{\text{tierra}}) \times 2 \pi \times 0,531 / 360$$

$$\text{Distluna} = (3,984 \times 360 / 0,531 \times 2 \pi) + R_{\text{tierra}} = 436,400 \text{ Km}$$

Así demostró que la Luna se encontraba a una distancia de 436.400 Km. La distancia de la luna es en realidad de 381,000 Km lo cual supone un error del 10%, equivalente al error que se acumulaba por el error en el diámetro de la luna.

8. CÁLCULO DE LA PRECESIÓN DE LOS EQUINOCCIOS POR HIPARCO

Hiparco (190-120 a.d.C.) es quien descubrió la precesión de los equinoccios. Midió la posición de una serie de estrellas brillantes y se dio cuenta de que la medición no se correspondía con la de los astrónomos griegos del pasado, en concreto Timocares y Aristilo (ambos contemporáneos de Euclides del 300 a.d.C. aprox). Concluyó que la estrella Spica ¡se había movido 2° con respecto al equinoccio de otoño! Midiendo lo mismo con otras estrellas obtenía el mismo resultado y se dio cuenta de que, lo que en realidad se movía era el lugar en que el sol se encontraba el día del equinoccio de otoño. Y se movía a una velocidad de, al menos, ¡un grado por siglo!

La velocidad real de la precesión de los equinoccios es de $1,39^\circ$ cada 100 años.

9. CÁLCULO DE LA DISTANCIA DE LA LUNA POR PARALAJE

Ya los antiguos vieron que había paralaje en la luna y algunos planetas. Esto quería decir que no estaban a una distancia infinita.

¿Qué es el paralaje?

En realidad nuestro cerebro está calculando la paralaje de las cosas que tenemos delante en cada momento, pero lo hace de manera inconsciente. Gracias a que tenemos dos ojos, visualizamos los objetos por medio de diferentes puntos de vista, el ojo derecho y el ojo izquierdo. Y por trigonometría el cerebro calcula la distancia a la que se encuentra dicho objeto.

Si nos colocamos un lápiz delante de nuestra nariz a una cierta distancia, y si miramos por el ojo derecho, veremos que el objeto que tengamos más allá del lápiz (por ejemplo una mesa) lo veremos a la derecha del lápiz. Y con el ojo izquierdo veremos la mesa a la izquierda del lápiz.



Imagen con el ojo izquierdo



Imagen con el ojo derecho

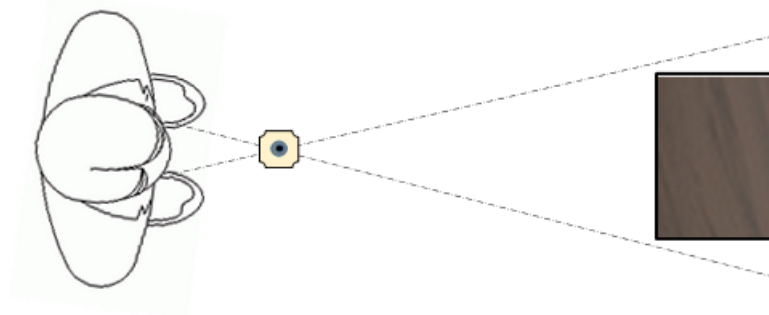


Figura 14

De esta manera el cerebro interpreta que el lápiz está mucho más cerca que la mesa. En esto se basan los sistemas de realidad virtual en 3D. Dan imágenes distintas en cada ojo, de manera que el usuario tiene la sensación de que las imágenes tienen profundidad.

Evidentemente esto no lo podemos hacer con la luna, ni siquiera con los objetos que tenemos a una distancia mayor de 10 metros, porque la distancia que hay entre cada ojo es muy pequeña y la paralaje es imperceptible.

Pero ¿y si ponemos un ojo en Cirene (ciudad romana al Norte de África) y otro en Babilonia?

Si midiéramos desde Babilonia el arco de ángulo que forma la luna con una estrella que se vea próxima, y a la vez la midiéramos en el mismo momento desde Cirene, podríamos ver que, en efecto, hay una diferencia en la medida de ambos ángulos.

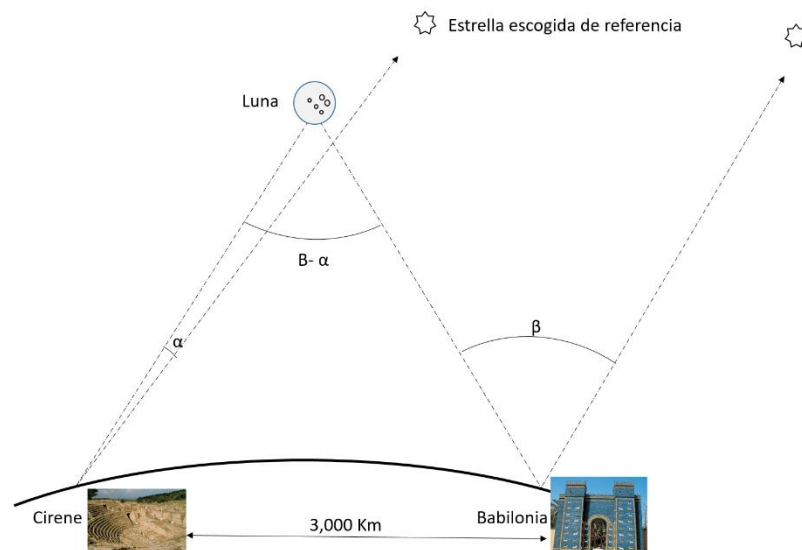


Figura 15: Paralaje de la luna entre las ciudades de Cirene y Bagdad. Angulos exagerados con fines didácticos.

En el dibujo los ángulos están exagerados con fines didácticos. Las líneas que unen la estrella con cada ciudad serían totalmente paralelas porque la estrella se encuentra muy lejos.

El ángulo que hemos medido en Cirene es de 5° respecto a la estrella de referencia y en Babilonia es de $5,45^\circ$. Por tanto la diferencia de paralaje será de $0,45^\circ$. En realidad es un paralaje sensible porque la luna ocupa en el cielo $0,52^\circ$, es decir la luna aparentemente estaría casi “un cuerpo” más a la izquierda en Babilonia.

Ahora ya es fácil calcular la distancia de la luna a la Tierra:

$$D=3,000\text{Km}/\text{Tangente}(0,45^\circ)=3,000/0,00787=381,000 \text{ Km.}$$