



ASTRONOMÍA PARA INGENIEROS INQUIETOS II

LOS DIFERENTES MODELOS DE UNIVERSO



Este documento es de uso único e intransferible para el alumno matriculado en el curso. Cualquier reproducción física o digital del documento sin permiso de los autores vulnera los derechos de propiedad intelectual de los mismos.

ÍNDICE

ÍNDICE.....	3
1. LOS DIFERENTES MODELOS DE UNIVERSO	4
1.1 El modelo Ptolemaico-Aristotélico que reinó dos mil años	4
1.2 El modelo de Copérnico y Galileo. Una “revolución”	9
1.3 El modelo de Tycho Brahe. El último baluarte del geocentrismo	13
1.4 El modelo de Kepler. Los planetas que saben matemáticas	14
1.5 El modelo de Newton. El culmen del conocimiento científico	20

1. LOS DIFERENTES MODELOS DE UNIVERSO

En el primer curso nos detuvimos especialmente en los avances que las antiguas civilizaciones, especialmente los griegos, lograron en el conocimiento astronómico. Este curso se centra especialmente en los avances logrados por la civilización occidental desde finales de la Edad Media hasta el Siglo XX.

Para poder explicar estos avances era preciso entender el movimiento de los planetas. Ahora estamos en disposición de poder explicar cuál era el modelo de universo que concebían los hombres antes del renacimiento, y como todo cambió en dos siglos.

1.1 El modelo Ptolemaico-Aristotélico que reinó dos mil años

Como ya se ha comentado, Aristóteles había propuesto un modelo del universo basado en órbitas circulares alrededor de la tierra. Todo giraba alrededor del mundo. Y así lo creyó la humanidad hasta el Siglo XVII (cierto que Copérnico es anterior pero nadie le creyó). Con esto, lo que quiero decir es que Carlos V, Felipe II, Cervantes Shakespeare, Enrique VIII, Cristóbal Colón, Sir Francis Drake, etc. Todos ellos concebían el mundo totalmente fijo, en el centro del universo. Cualquier otro modelo era “inconcebible”.

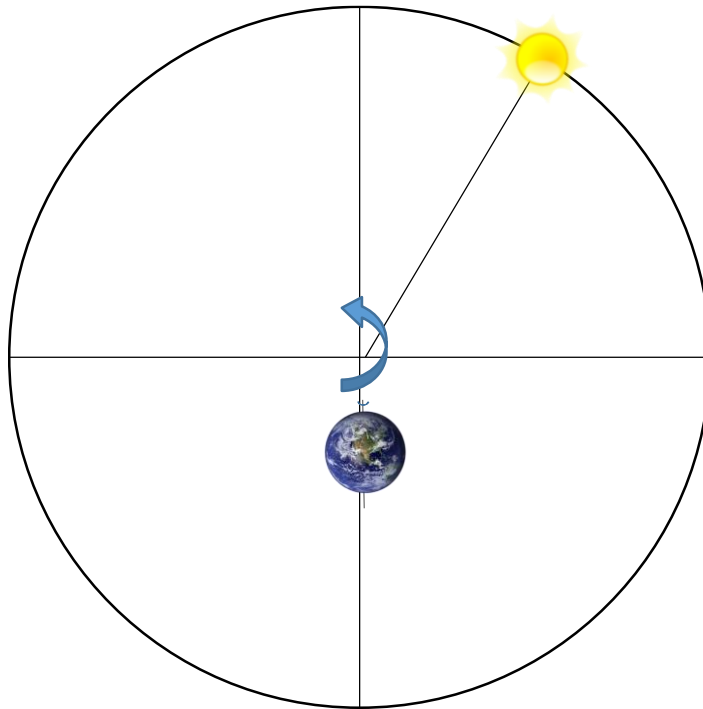
La esfera de las estrellas fijas giraba diariamente hacia el Oeste entorno a la Tierra (es exactamente eso lo que parece que sucede cuando vemos el cielo estrellado durante toda la noche). El sol y todos los astros (planetas y Luna) se veían arrastrados por ese movimiento diario. Pero, a su vez, cada uno de estos astros consigue moverse por la esfera de las estrellas fijas en sentido contrario (hacia el Oeste) a lo largo del año o los años, y con distintas velocidades.

El sol en concreto tardaba 365 días en completar una vuelta completa alrededor de la Tierra, moviéndose de Oeste hacia el Este por la eclíptica, en la esfera de las estrellas fijas.

Sin embargo este modelo no era suficientemente preciso y no encajaba bien con las mediciones que los griegos de Alejandría venían realizando.

Enseguida se vio que el Sol no se movía siempre a la misma velocidad por la eclíptica. El sol parecía ir, a veces más lento y a veces más rápido (esto es debido en realidad a que la Tierra no describe un círculo perfecto alrededor del sol, sino que realiza un movimiento elíptico).

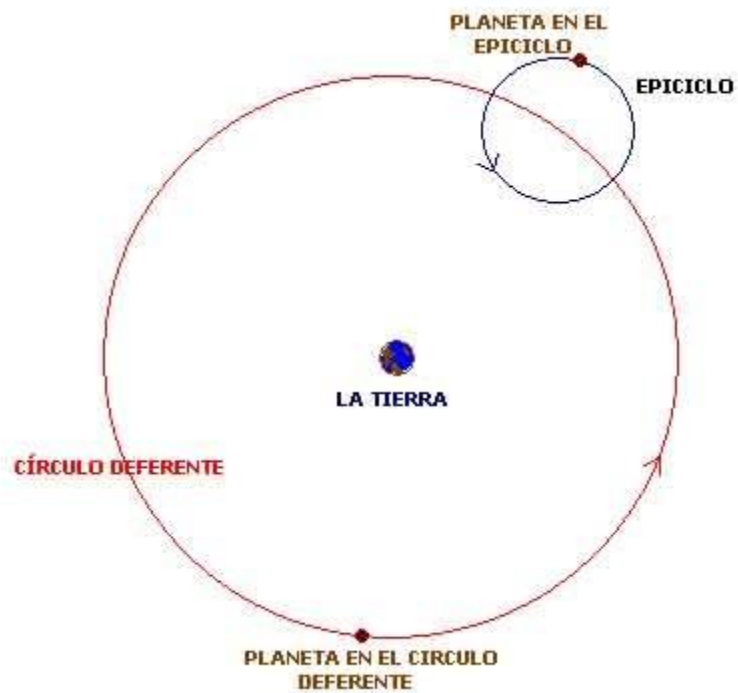
Hiparco corrigió el modelo proponiendo un círculo “excéntrico” para el movimiento del sol, cuyo centro no estaba en la Tierra.



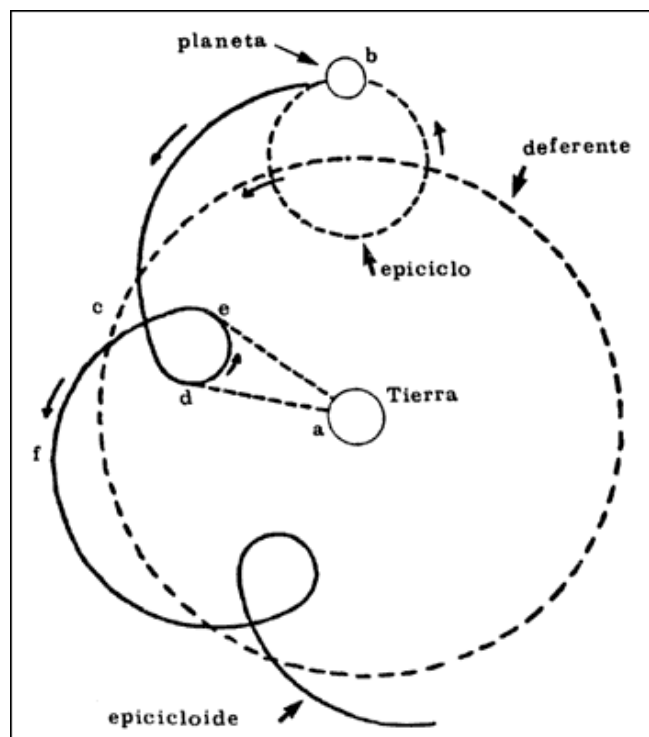
El sol, según este modelo, tardaba 365 días en dar la vuelta a la Tierra. El eje de la Tierra estaría inclinado hacia un lado siempre, y esto explica la existencia de las estaciones.

El movimiento de los planetas era más difícil de encajar, siendo el reto principal lograr explicar su movimiento retrógrado. Es Ptolomeo quien en el Siglo II propone el sistema más completo.

El planeta está incorporado en una esfera (su propio epiciclo), la cual a su vez gira entorno a la tierra ajustada en otra esfera (su propio círculo deferente).

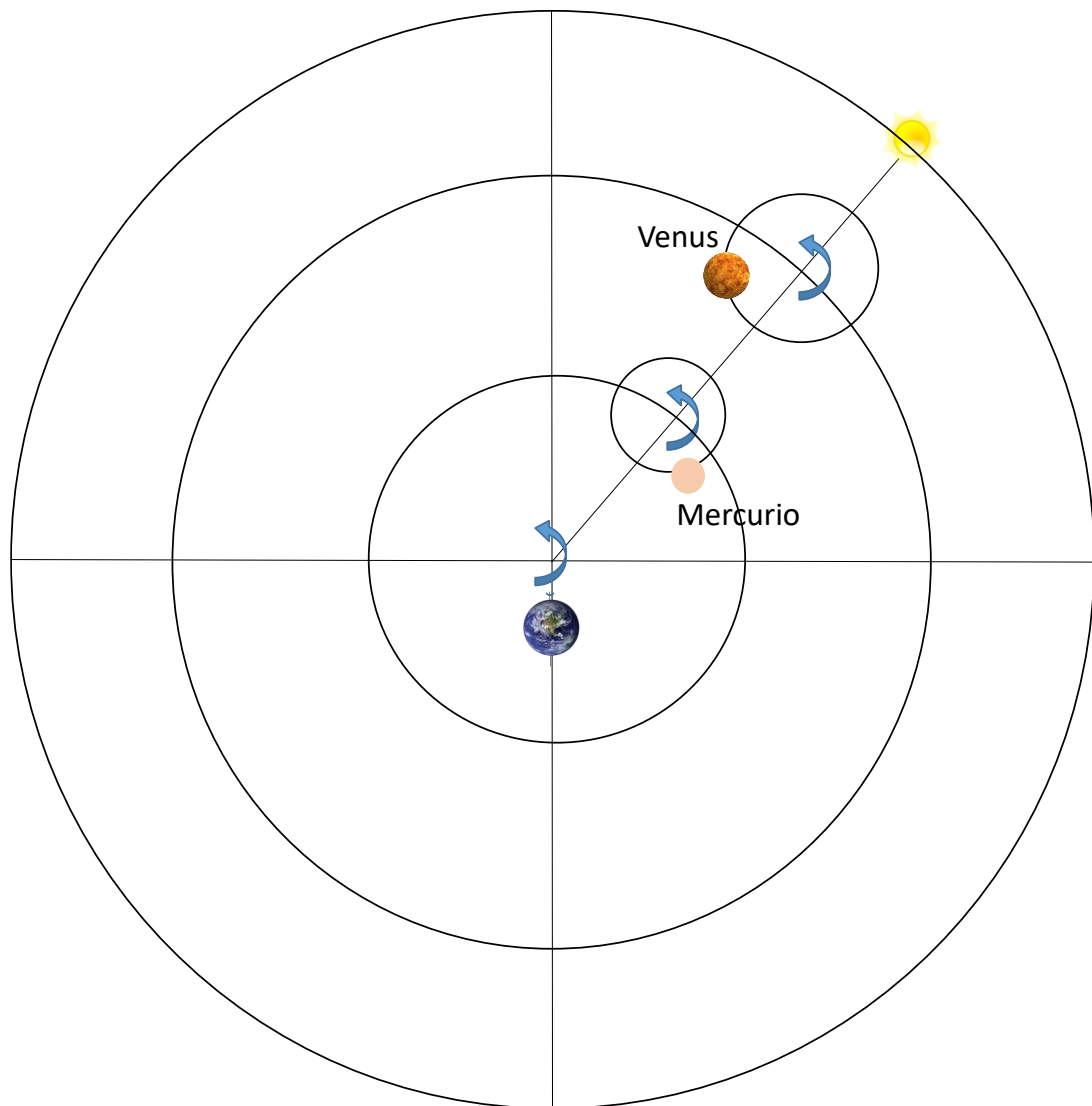


De esta manera se lograba explicar el movimiento retrógrado de los planetas.



¿Pero cómo explicar por qué los planetas Mercurio y Venus se ven siempre cercanos al sol?

Lo que se plantea es que el círculo deferente de Mercurio y de Venus giran a la misma velocidad angular que el sol y continuamente alineados.

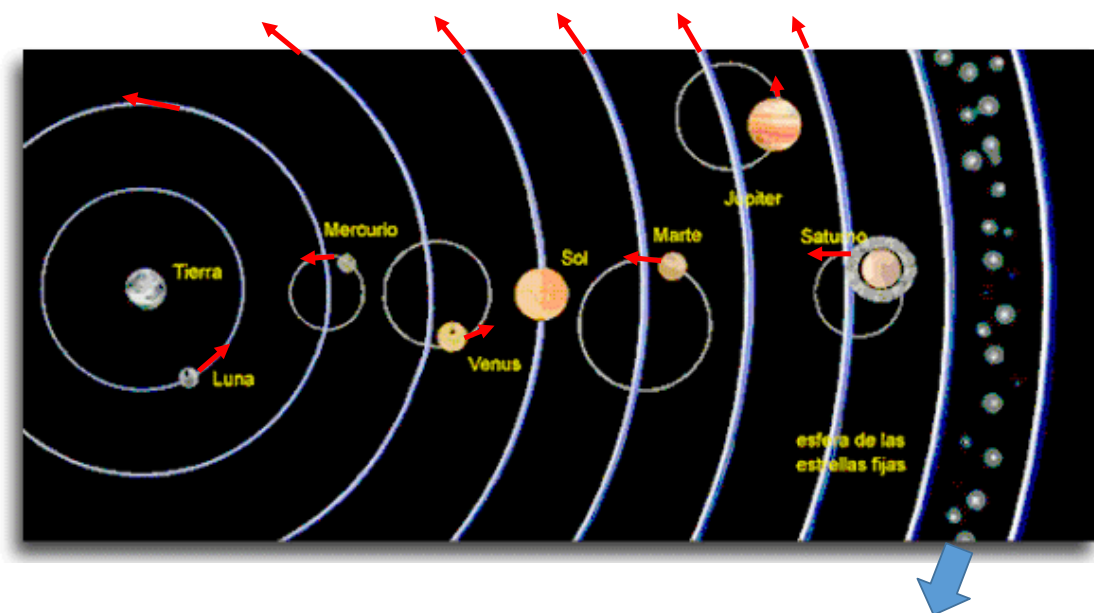


Es decir, los tres deferentes dan una vuelta alrededor de la Tierra en 365 días. A su vez, el epiciclo de Venus da una vuelta completa en 584 días. Ya vimos que aunque Venus tarda en dar la vuelta al sol 224 días, el ciclo de Venus dura 584, y esto es lo que veían los antiguos y así lo reflejaron en su modelo geocéntrico. El epicentro de Mercurio tardará en dar la vuelta completa, no 88 días sino 116 días.

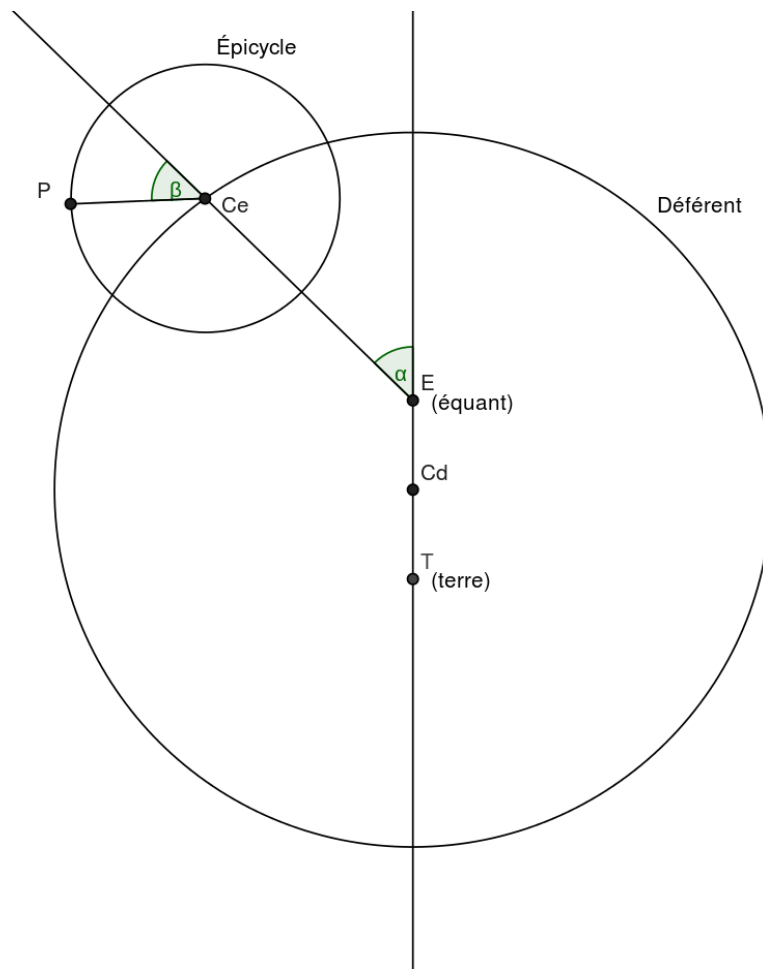
Los planetas exteriores (Marte, Júpiter y Saturno) darían también vueltas alrededor de la Tierra. El círculo deferente de Marte tardaría 686 días en dar una vuelta completa (que es lo que en realidad tarda Marte en dar la vuelta al sol), mientras que su epiciclo tardaría 780 días en dar la vuelta completa (que es lo que dura el ciclo de Marte). De manera idéntica, el círculo deferente de Júpiter tardaría 11 años y 315 días en dar la vuelta completa, mientras que su epiciclo tardaría 399 días. Y por último el círculo deferente de Saturno tardaría 29 años y 167 días mientras que su epiciclo tardaría 378 días.

Por supuesto la luna también giraría alrededor de la tierra cada 27 días y 7 horas. Pero como en este modelo el sol también gira alrededor de la tierra en un ciclo de 365 días, el ciclo de las fases de la luna dura en el modelo 29 días y medio (que es lo que las observaciones experimentales nos muestran en los cielos).

Este modelo lograba explicar todos los movimientos que vemos de los astros en el cielo.



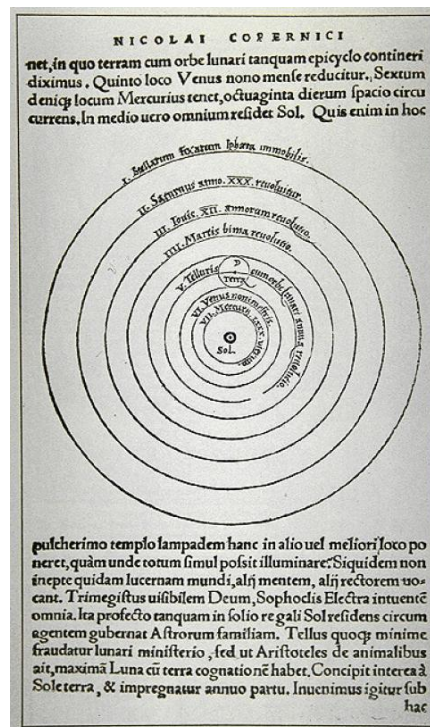
Pero este modelo no era suficiente. Como en el caso del sol, el círculo deferente de los planetas parecía acelerarse o decelerarse según las observaciones realizadas en Alejandría. Era necesario introducir una complicación mayor para encajar el modelo con los datos tomados experimentalmente. Ptolomeo introduce así el Ecuante. Un punto desde el cual la velocidad angular es uniforme.



Este modelo heliocéntrico sobrevivió casi dos mil años, si bien se fue haciendo cada vez más complejo. El modelo de Ptolomeo lograba explicar los movimientos de los planetas y el sol con suficiente exactitud, incluyendo sus movimientos retrógrados. Explicaba también las fases de la Luna e incluso los eclipses.

1.2 El modelo de Copérnico y Galileo. Una “revolución”

Copérnico fue el primer científico moderno que cuestiona el modelo Ptolemaico, proponiendo un modelo Heliocéntrico.

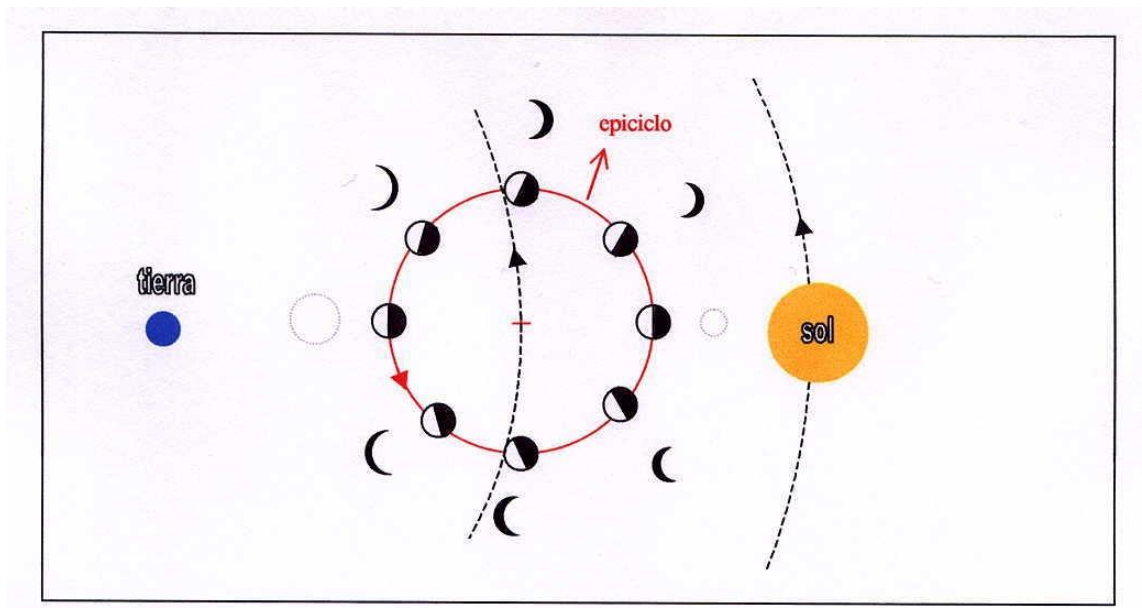


Sin duda Copérnico acertó con su modelo pero no logró demostrarlo. Para sus contemporáneos, ambos modelos eran matemáticamente equivalentes, pero el modelo de Copérnico planteaba muchos más problemas de índole filosófico y religioso que el modelo geocéntrico clásico.

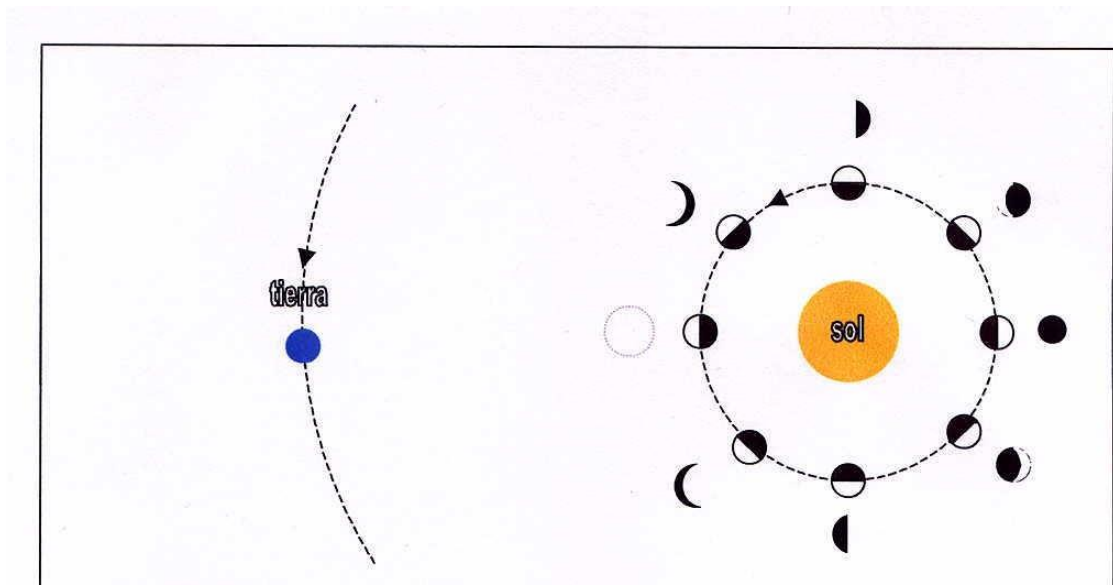
El principal ataque frente al modelo de Copérnico se basó en la forma inmutable de las constelaciones. Si la Tierra realmente girara alrededor del sol, el punto de vista de las constelaciones debería cambiar de manera considerable si lo vemos desde nuestra posición en verano, que si las vemos desde nuestra posición en invierno.

Galileo fue, sin embargo, seducido por el modelo copernicano. Y cuando tuvo la oportunidad de ver las fases de Venus con su telescopio y vio los satélites de Júpiter girar en torno a este planeta, no dudó en apoyar fervientemente el modelo de Copérnico. Veamos por qué.

Según el modelo de Ptolomeo, Venus giraba en torno a la Tierra en una circunferencia más interior que el sol (que también giraba en torno a la tierra). Como hemos visto, los movimientos de Venus alrededor de su epicyclo lograban explicar por qué se producían los movimientos retrógrados que se observaban en el cielo. Y el hecho de que el sol girara a la misma velocidad rotacional que el epicyclo de Venus y Mercurio, lograba explicar por qué la visual de estos planetas no se alejaba nunca excesivamente del sol.



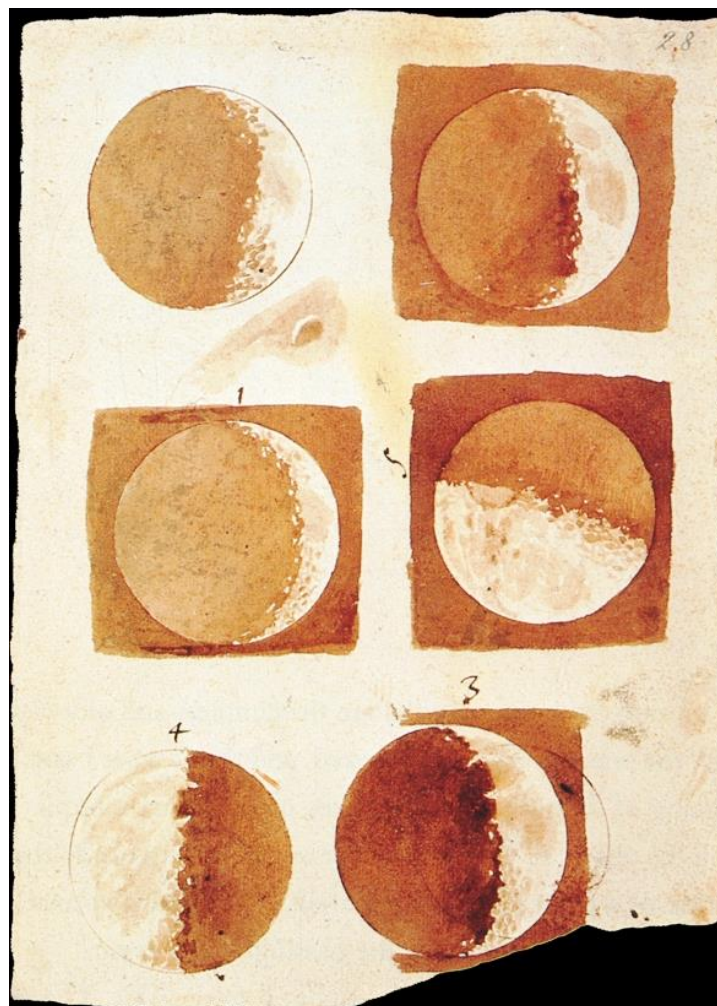
Pero las fases que Galileo veía en Venus no encajaban con el modelo de Ptolomeo y si encajaban con el modelo de Copérnico. Según el modelo de Ptolomeo, Venus nunca debería pasar de una fase del 50% (“medio Venus”).



Como vemos, en el modelo Copernicano, Venus alcanza incluso fases del 100% iluminado (“Venus lleno”), como pudo comprobar Galileo con su telescopio por primera vez en la historia.

Además de la prueba de las fases de Venus, y el indicio de los satélites de Júpiter, ya comentados, Galileo presentó otras pruebas e indicios que apoyaban la tesis de Copérnico, que comentamos a continuación.

Dado que los principales argumentos de sus adversarios se basaban en la autoridad de Aristóteles, Galileo centró parte de sus esfuerzos en tumbar las tesis aristotélicas que habían dominado la ciencia durante 2.000 años. Con su telescopio logró ver con total claridad los cráteres (el veía “montañas”) de la luna, así como las manchas solares, lo cual refutaba la tesis aristotélica de que los astros son lisos, perfectos e inmutables.



También supo dar respuesta al principal ataque científico de los aristotélicos que argumentaban que si la tierra gira alrededor del sol las constelaciones deberían cambiar su forma a lo largo del año. Frente a esto, Galileo contraargumenta que las estrellas no se veían más grandes con el telescopio de lo que se ven a simple vista. Esto demostraba que se encontraban muchísimo más lejos que los planetas y el sol. Y esto permitía responder al argumento anterior. Al encontrarse tan lejos, la vista de las estrellas fijas es prácticamente idéntica desde nuestra posición en verano que desde nuestra posición en invierno.

Otra prueba que pudo proponer Galileo fue demostrar que el sol giraba sobre sí mismo. Esto lo logró siguiendo la pista de las manchas solares, que volvían a aparecer después de ocultarse cuando avanzaban por la cara opuesta. Era un potente indicio de que muy probablemente la Tierra giraba en torno a sí misma también.

Como se sabe, los siguientes ataques contra Galileo vinieron desde el punto de vista religioso.

El salmo 93 reza así:

“Jehová reina; se vistió de magnificencia;

Jehová se vistió, se ciñó de poder.

Afirmó también el mundo, y no se moverá.”

Y también en el libro de Josué se dice:

“Josué dijo (...):

«Sol, quédate quieto;

y luna, detente ».

Y el sol se quedó quieto y la luna se detuvo”

La inquisición pidió a Galileo que aceptara su tesis solo como una hipótesis igual de válida que el geocentrismo. Galileo se negó, y entonces fue obligado a presentar pruebas irrefutables del movimiento de la Tierra. ¿Fue capaz Galileo de presentar pruebas irrefutables? Lo vemos ahora mismo.

1.3 El modelo de Tycho Brahe. El último baluarte del geocentrismo

Galileo fue capaz de demostrar que el sistema Ptolemaico era falso porque no encajaba con las fases que él veía en Venus, pero no sería tan fácil demostrar que su modelo era el verdadero e irrefutable. Podía haber otros modelos...

Ya hemos visto que con la precisión de las medidas de la época, el modelo geocéntrico había logrado sobrevivir por adecuarse bien a lo observable en los cielos, y vimos que las fases de Venus observadas con el telescopio de Galileo, fueron su primer y principal ataque.

Pero para entonces la iglesia se atenía ahora al sistema de Tycho Brahe, que proponía algo realmente ingenioso, manteniendo que la Tierra estaba inmóvil y en el centro del universo. Este modelo de Tycho encajaba a la perfección con las fases que Galileo veía en Venus.

Tycho nace tres años después de la muerte de Copérnico y muere en 1601. De manera escrupulosa comienza a registrar todas las mediciones diarias, especialmente del planeta Marte. Con estas mediciones debe reconocer que el modelo original de Copérnico encaja mucho mejor que el heliocéntrico, pero los problemas teológicos y políticos le hacen proponer su ingeniosa solución, basado también, como el de Copérnico, en órbitas circulares.

Pero él mismo era consciente de que las órbitas circulares que él proponía seguían sin encajar bien.

Galileo no fue capaz de refutar el modelo de Tycho Brahe y tampoco fue capaz de demostrar el movimiento de la Tierra (de hecho no se logró hasta que en 1851 Foucault presentó su péndulo).

Por este motivo fue obligado a abjurar de sus tesis.

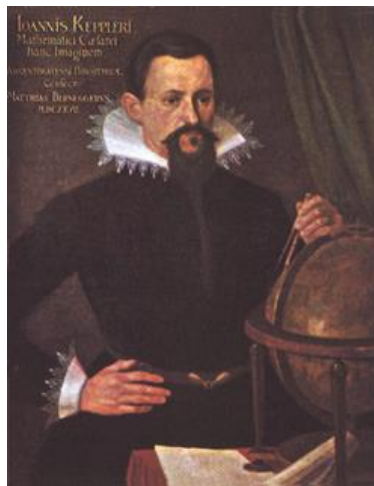
Pero precisamente fueron las mediciones tan precisas que hizo Tycho Brahe, cuyo modelo había sido el último baluarte de los geocentristas, las que acabaron poniendo las bases para tumbar de manera definitiva el modelo geocéntrico. A partir de 1601 su amigo Kepler recibe toda esa ingente cantidad de datos y mediciones y sustituye a Tycho como matemático imperial.

1.4 El modelo de Kepler. Los planetas que saben matemáticas

Gracias a todos esos datos y mediciones exactas de las posiciones de Marte, proporcionados por Tycho Brahe, y desde luego gracias a su capacidad matemática, Kepler podrá formular con exactitud en 1609 el esquema de órbitas reales que realiza cada planeta.

Kepler (1571-1630) es contemporáneo de Galileo y ambos son Copernicanos convencidos y trabajarán de forma complementaria para demostrar que Copérnico estaba en lo cierto (el sol está en el centro y está inmóvil). Ya vimos como Galileo trabajó con sus observaciones telescópicas. Kepler sin embargo, puso su conocimiento matemático al servicio de esta corriente científica.

Es innegable que la gran motivación de Kepler fue su admiración por la armonía que era capaz de percibir en la naturaleza y en el cosmos (cosmos = orden). Él consideraba que Dios, al ser perfecto, debía ser el geómetra y el matemático perfecto. Por tanto los movimientos de los planetas debían ser perfectos. Esta manera de pensar le llevó a uno de los descubrimientos más fructíferos de la historia de la ciencia.



Kepler (1571-1630)

Su primer intento fue, lógicamente, probar con órbitas circulares (las más simples y perfectas), pero los registros astronómicos no encajaban con este tipo de órbitas. Probó otras figuras geométricas sin éxito. Al final, “solo me quedó una carreta de estiércol”, decía el propio Kepler al referirse a las elipses. Cuando comenzó a trabajar los datos experimentales contrastándolos con posibles movimientos elípticos, comprobó que el modelo encajaba a la perfección. Quedó sin embargo algo contrariado ¿Por qué elipses? ¿No es mucho más perfecto el círculo?

Sin embargo, tres siglos después, su intuición se vio confirmada. La teoría de la Relatividad general de Einstein mostraba que los cuerpos celestes siguen líneas rectas en la geometría tridimensional del espacio-tiempo. ¿Qué hay más simple y perfecto que una recta? Esto lo explicaremos en el siguiente curso...

Aunque quedara contrariado porque no eran círculos, de alguna manera se cumplía de forma perfecta su intuición de que los planetas debían seguir órbitas geométricas y matemáticas definidas. En concreto las propiedades de la elipse habían sido postuladas por Apolonio, 1,800 años antes.

La pregunta que surgía en ese momento era de tipo filosófico.

PENSAR:

¿Las matemáticas son un invento o un descubrimiento?

Apolonio, el gran astrónomo griego de Alejandría, había estudiado y definido las curvas cónicas, sin haber tenido en cuenta en absoluto los movimientos celestes. Fue un ejercicio brillante de geometría matemática, que no servía para nada. Nada en la naturaleza tenía forma de elipse, ni los griegos necesitaban el conocimiento de las elipses para nada práctico.

Y 1,800 años después, Kepler concluye que los planetas siguen de manera precisa órbitas elípticas. Entonces, ¿las matemáticas están también en la naturaleza además de en la mente humana? ¿Los planetas saben matemáticas? ¿los planetas obedecen a leyes matemáticas? ¿por qué?

¿Las matemáticas son entonces un descubrimiento o son un invento?

De manera casi consensuada, los grandes matemáticos de la historia, cuando han ido encontrando nuevas leyes matemáticas, consideran que “las descubren”, desde luego aseguran que no las inventan. Esto ofrece una visión platónica de las matemáticas, como si tuvieran una realidad más allá de la mente del hombre. Este es uno de los grandes misterios científico-filosóficos que se debaten en la actualidad.

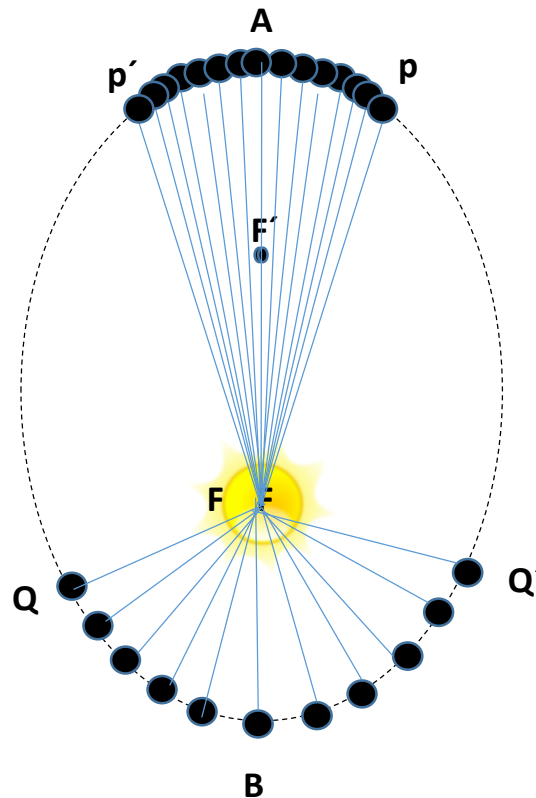
Continuando con Kepler. Ya tenía su primera ley:

1. Los planetas tienen movimientos elípticos alrededor del Sol, estando éste situado en uno de los 2 focos de la elipse

Démonos cuenta de que el hecho de que los planetas orbitaran en elipses alrededor del sol, explicaba la razón de por qué en el modelo Ptolemaico era necesario incorporar círculos excéntricos, ecuantos, etc...

Kepler continuó trabajando sin descanso con todos los datos astronómicos de que disponía. No estaba ya proponiendo una teoría concreta, simplemente buscaba patrones matemáticos que se cumplieran en todos los casos. Así encontró la segunda y la tercera ley:

2. La velocidad areolar es constante
3. El cuadrado de los períodos de la órbita de los planetas es proporcional al cubo de la distancia promedio al sol $T^2 = k \times R^3$



En el gráfico anterior podemos ver las dos primeras leyes representadas. El sol se encuentra justo en uno de los focos de la elipse. Y la velocidad areolar del satélite se mantiene constante. Esto quiere decir que el área por segundo que va barriendo el radio sol-satélite es constante. Por tanto, dado que el radio de giro es mucho más grande entre P y P' que entre Q y Q', la velocidad de translación del satélite será mayor entre Q y Q'. Esto es totalmente lógico porque cuando el satélite se desplaza desde el punto A al punto B está continuamente acelerándose, dado que la fuerza de atracción del sol tiene una componente positiva de aceleración en su trayectoria. Por tanto en el Punto B tendrá su máxima velocidad.

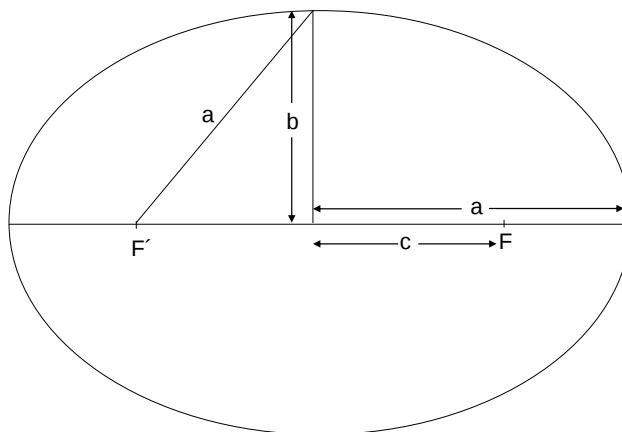
Sin embargo, cuando va del punto B al punto A la componente de atracción del sol es de deceleración y por este motivo la velocidad en A es la más baja. Es en realidad el mismo fenómeno que cuando la montaña rusa pasa por un looping (su velocidad es máxima en el punto más bajo y es mínima en el punto más alto)

EJERCICIO:

Calcula la velocidad que lleva la Luna cuando se encuentra en su perigeo. Y cuando se encuentra en su apogeo.

Sabemos por la Segunda Ley de Kepler que la velocidad areolar es constante.

Sabemos que el área de una elipse es $A = \pi ab$



En el caso de la órbita elíptica de la luna conocemos el valor del semieje mayor (a), puesto que sabemos el perigeo (menor distancia de la luna a la tierra) y el apogeo (mayor distancia):

$$a = (351+411)/2$$

E inmediatamente conocemos c

$$c = a - 351$$

b es fácil de obtener con la siguiente fórmula que cumplen todas las elipses (es fácil de demostrarlo con el dibujo anterior):

$$a^2 = b^2 + c^2$$

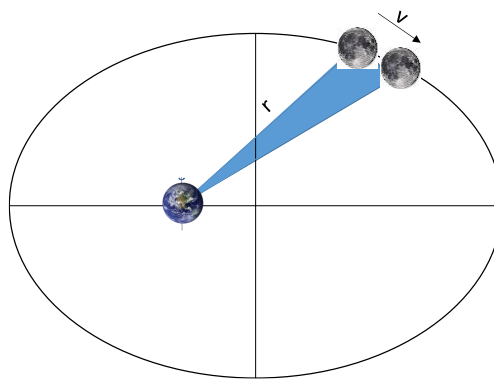
El Área de la elipse de la luna será:

$$A = \pi ab = 454.609 \text{ (miles de km)}^2$$

Dado que recorre este área en 27,32 días, la velocidad areolar sería:

$$\text{Velocidad areolar} = 0,193 \text{ (miles de km)}^2/\text{s}$$

Y el área que recorre en un instante determinado es el siguiente:



$$\text{Velocidad areolar} = \frac{1}{2} \times v \times r$$

Dado que r en el perigeo vale 351, $v = 1,1 \text{ Km/s}$

Dado que r en el apogeo vale 411, $v = 0,94 \text{ Km/s}$

Ahora podemos responder a la pregunta que dejamos a medias en el curso anterior. ¿Cuánto dura un eclipse cuando la sombra de la luna es máxima (en el perigeo)? Dado que la velocidad de la luna en el perigeo es de $1,1 \text{ km/s}$, y recordando que, debido al giro de la tierra sobre sí misma, nos movemos a $0,46 \text{ km/s}$ hacia el Este, compensando ambas velocidades tenemos que la velocidad de la sombra de la luna se movería a $0,64 \text{ km/s}$ (en el ecuador).

Ya calculamos en su momento que la sombra máxima de la luna proyectada sobre la Tierra en el perigeo era de 322 km .

Por tanto el mayor eclipse posible durará $322 \text{ km} / 0,64 \text{ km/s} = 503\text{s}$. Es decir, un eclipse total en la tierra puede durar 8,4 minutos cuando la luna se encuentra en el perigeo y su sombra es máxima.

1.5 El modelo de Newton. El culmen del conocimiento científico

Estamos en 1684. Kepler ya ha propuesto sus famosas tres leyes que proponen una órbita elíptica para el movimiento orbital.

Pero quedaba pendiente de conocer ¿Por qué los planetas se mueven en órbitas elípticas? ¿Por qué elípticas? Newton acabaría dando con la solución.

Es Newton (1642-1727) quien, por primera vez, clarifica el concepto de “fuerza” en la física moderna. Una fuerza aplicada sobre un objeto produce un cambio en su velocidad o en la dirección de su movimiento (provoca una aceleración).

Fuerza= $m \times a$

Newton fue además un gran matemático y desarrolló el cálculo integral y diferencial (integrales y derivadas), lo que le dio unos instrumentos que nadie antes había tenido antes que él (como Galileo usó el telescopio). De esta manera pudo demostrar que las elipses de Kepler solo podían deberse a una fuerza de atracción inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Esto lo demuestra en una de las obras más importantes de la historia universal, sus *Principia*.

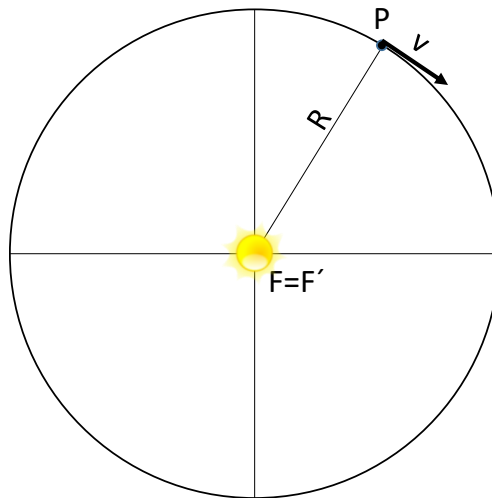
La demostración implica utilizar derivadas de vectores que el público objetivo de este programa domina pero que prefiero no incluir en este curso.

Sin embargo es muy sencillo demostrar que, si asemejamos las órbitas de los planetas a órbitas circulares (la de muchos de ellos son prácticamente circulares), la tercera ley de Kepler resulta ser equivalente a la Ley de Gravitación Universal propuesta por Newton.

En efecto, si la órbita es circular, dado que el planeta se encuentra en equilibrio, la aceleración centrífuga debe ser igual a la aceleración de atracción debida al sol.

Es decir:

$$\omega^2 \times R = G \times M_{\text{sol}}/R^2$$



Por otra parte, el periodo T (segundos que tarda en dar una vuelta completa) se puede obtener fácilmente conociendo la velocidad angular (ω)

$$\omega = 2\pi / T$$

Es decir,

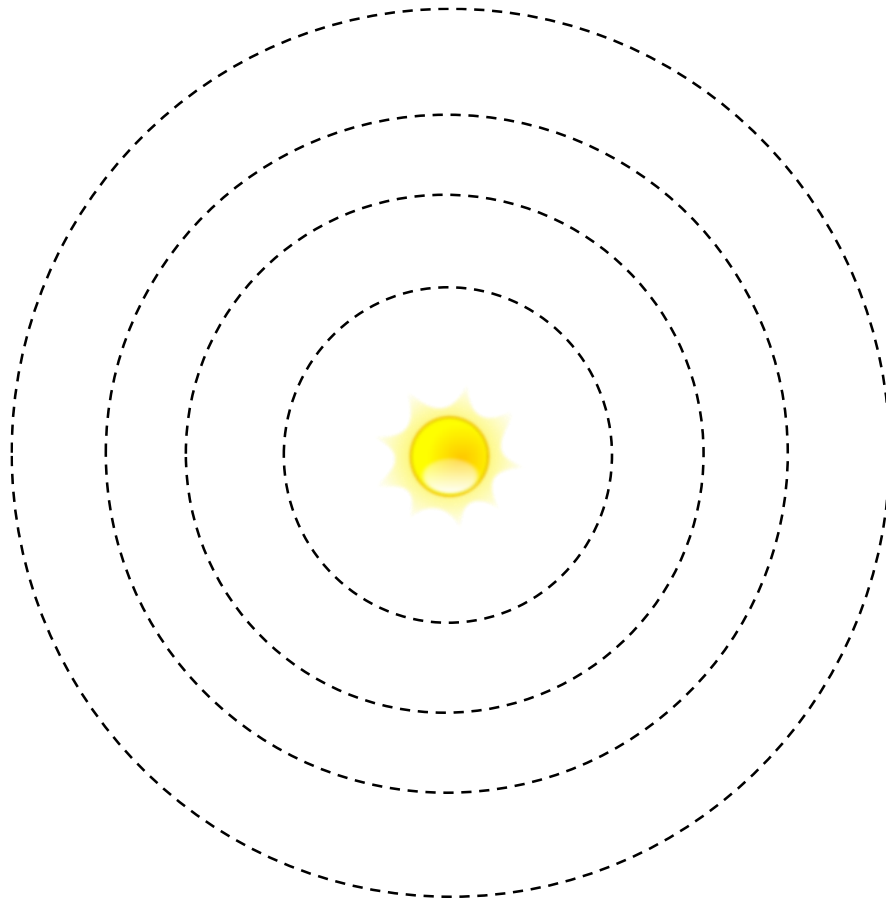
$$T^2 = 4\pi^2 \times R^3 / (G \times M_{sol})$$

Ahí tenemos la tercera ley de Kepler:

El cuadrado de los períodos de la órbita de los planetas es proporcional al cubo de la distancia promedio al sol

Es evidente por tanto que la tercera ley de Kepler fue una pista muy importante para que Newton pudiera obtener su Ley de atracción universal, ya que, prácticamente, son equivalentes.

Por otra parte, una función que era inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, a Newton le encajaba muy bien como matemático y físico. Estábamos buscando la razón de por qué todo gira alrededor del sol (un punto central). Y él sabía que, hiciera lo que hiciera el sol, la potencia de esa acción debería reducirse con el cuadrado de la distancia. Cualquier onda de energía, de luz, de sonido o de presión se reduce con el cuadrado de la distancia al foco emisor.



Newton propone, además, que la fuerza con la que se atraen los planetas es, además de inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, es también proporcional a las masas de ambos. Esto que ahora nos parece obvio, en su momento fue una gran paradoja, porque suponía diferenciar el concepto de “peso” del concepto de “masa”. El concepto masa se refiere a “cantidad de materia”, mientras que el concepto de “peso” es una fuerza. Una misma cantidad de materia puede pesar diferente dependiendo de en qué campo gravitatorio se encuentre.

Dicho todo esto, podemos escribir la Ley de gravitación universal propuesta por Newton

$$\text{Fuerza} = G \times m \times M/R^2$$

Pero si también

$$\text{Fuerza} = m \times a$$

Entonces se obtiene el singular hecho de que

$$a = G \times M/R^2$$

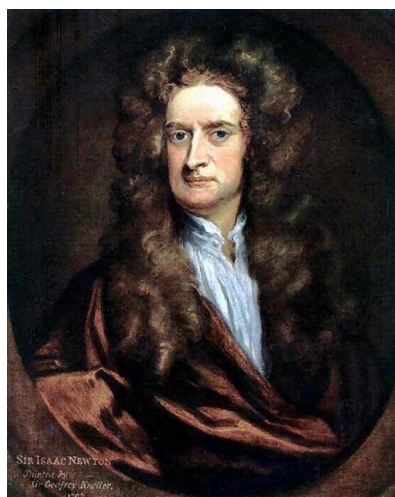
Es decir, ¡la aceleración que sufre un planeta o cualquier cuerpo no depende de su masa (m)!

() Despejar ambas m no es evidente. Una de ellas es la masa inercial, la experiencia nos muestra que poner en movimiento un cuerpo con mucha cantidad de materia exige mucha fuerza (cualquiera que ha arrancado un camión lo ha podido experimentar). Sin embargo la otra m es la masa gravitatoria que es atraída por las otras masas gravitatorias. Ambas resultaron ser equivalentes en la propuesta de Newton.*

Según esta ley, al no depender la aceleración de la masa, seguirán el mismo movimiento los cuerpos grandes que los pequeños en el espacio. ¡Pero también en la tierra! Esto ya lo había descubierto Galileo demostrando que los diferentes objetos caían con la misma aceleración, con independencia de su peso. Newton empieza a intuir y a demostrar que la misma ley que se cumple en la Tierra se cumple también en todo el universo. Por eso se le llama la “Ley de Gravitación Universal”. Es la primera vez que se tiene la osadía de proponer una ley “universal”.

EJERCICIO:

Eres Sir Isaac Newton. Conoces el radio de la Tierra y la distancia de la Tierra al Sol. Queremos calcular la constante de gravitación (G) que rige en todo el universo, “así en la tierra como en el cielo”.



Sir Isaac Newton (1643-1727)

El principal problema con el que nos encontramos es que Newton no conocía la masa del sol y por tanto no podemos calcular G. ¿Cómo podemos calcular la masa del sol?

Podemos igualar la fuerza de atracción solar con la fuerza centrífuga del giro de la Tierra y despejar $G \times M_{sol}$

$$F_{cf} = m\omega^2 r$$

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$\omega^2 \times R = G \times M_{sol} / R^2$$

$$G \times M_{sol} = \omega^2 \times R^3$$

Calcular ω de nuestro planeta es muy sencillo, sabiendo que la Tierra tarda en girar alrededor del sol 365,2 días, se puede calcular la velocidad de giro de la Tierra:

$$\omega = 2 \pi / (365,2 \times 3600 \times 24 \text{ segundos}) = 2 \times 10^{-7} \text{ rad/s.}$$

Y por otra parte, R es la distancia de la Tierra al Sol, 149,6 Millones de Km. Por tanto tenemos:

$$G \times M_{sol} = 4 \times 10^{-14} \times (149,6 \times 10^9)^3 = 1,33 \times 10^{20}.$$

Y también podemos calcular $G \times M_{tierra}$ porque conocemos la aceleración con que caen los cuerpos en la tierra. Sabemos por sencillos experimentos que la aceleración de cualquier cuerpo que cae en la Tierra es de 9,8 m/s².

Por tanto

$$9,8 = G \times M_{tierra} / R_{tierra}^2$$

De esta manera podemos calcular cuánto vale

$$G \times M_{tierra} = 3,99 \times 10^{14}$$

Podemos así calcular fácilmente la relación entre la masa del sol y la masa de la tierra:

$$M_{sol} / M_{tierra} = 1,33 \times 10^{20} / 3,99 \times 10^{14} = 333.000$$

Es decir, con estos sencillos cálculos se llegaba a la conclusión de que la masa del sol era más de 300.000 veces superior a la de la Tierra.

Pero seguimos sin conocer la masa de la Tierra ni la del sol. Si supiéramos su densidad podríamos calcular todo de manera exacta, porque conocemos su volumen. Y así podríamos por fin hallar G.

A partir de diferentes experimentos en volcanes consiguieron ver la desviación que se producía en la caída vertical como consecuencia de la atracción del volcán. De esta manera se consiguió calcular la densidad media del volcán que se consideró de 5,5 veces la densidad del agua, es decir 5.500 kg/m³.

Si consideramos que la densidad de la tierra es también 5,5 veces la densidad del agua, obtenemos que la masa de la tierra es

$$M_{tierra} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3 \times 5.500 = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Como conocíamos que

$$G \times M_{tierra} = 3,99 \times 10^{14}$$

Podemos calcular G, que valdría:

$$G = 6,67 \times 10^{-11}$$

Hemos obtenido un valor muy aproximado al valor real de la constante de gravitación universal G. El valor exacto es

$$G = 6.67384(80) \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

La mayor dificultad de este procedimiento estribó, lógicamente, en calcular la densidad exacta de la Tierra. Durante muchos años solo se pudo calcular por métodos aproximados. Algunos de los métodos fueron sugeridos por Isaac Newton pero no fueron calculados realmente hasta muchos años después. Por tanto durante muchos años el valor de G no fue conocido y únicamente se conocía cuántas veces era más pesado el sol o cualquier planeta en relación con la masa de la Tierra.

Una vez que conocemos la constante G, ¿es fácil calcular la distancia exacta de cada planeta al Sol! O viceversa. Basta con igualar la fuerza centrífuga a la fuerza de la gravedad. De esta manera, conocida la distancia del astro al Sol, es fácil calcular el número de días que tarda el planeta en dar una vuelta a su órbita.

En efecto, en la siguiente tabla se hacen cálculos sencillos para obtener el periodo de rotación de cada planeta en días, atendiendo a la distancia al sol de cada planeta. Sorprende la precisión del valor obtenido. Obtenemos valores exactos para Mercurio, Marte y Venus y valores muy cercanos para Júpiter y Saturno:

MERCURIO		
Distancia al sol (m)	5,79E+10	
Aceleración de atracción (m/s ²)	0,0396	
Velocidad angular (vueltas/segundo)	1,31589E-07	
Días en dar una vuelta	88	
VENUS		
Distancia al sol (m)	1,08E+11	
Aceleración de atracción (m/s ²)	0,0114	
Velocidad angular (vueltas/segundo)	5,1667E-08	
Días en dar una vuelta	224	
MARTE		
Distancia al sol (m)	2,2799E+11	
Aceleración de atracción (m/s ²)	0,0026	
Velocidad angular (vueltas/segundo)	1,68452E-08	
Días en dar una vuelta	687	
JUPITER		
Distancia al sol (m)	7,78518E+11	
Aceleración de atracción (m/s ²)	0,0002	
Velocidad angular (vueltas/segundo)	2,6696E-09	
Días en dar una vuelta (teórica)	4336	4330
SATURNO		
Distancia al sol (m)	1,43347E+12	
Aceleración de atracción (m/s ²)	0,0001	
Velocidad angular (vueltas/segundo)	1,06848E-09	
Días en dar una vuelta (teórica)	10832	10752

RECORDAR:

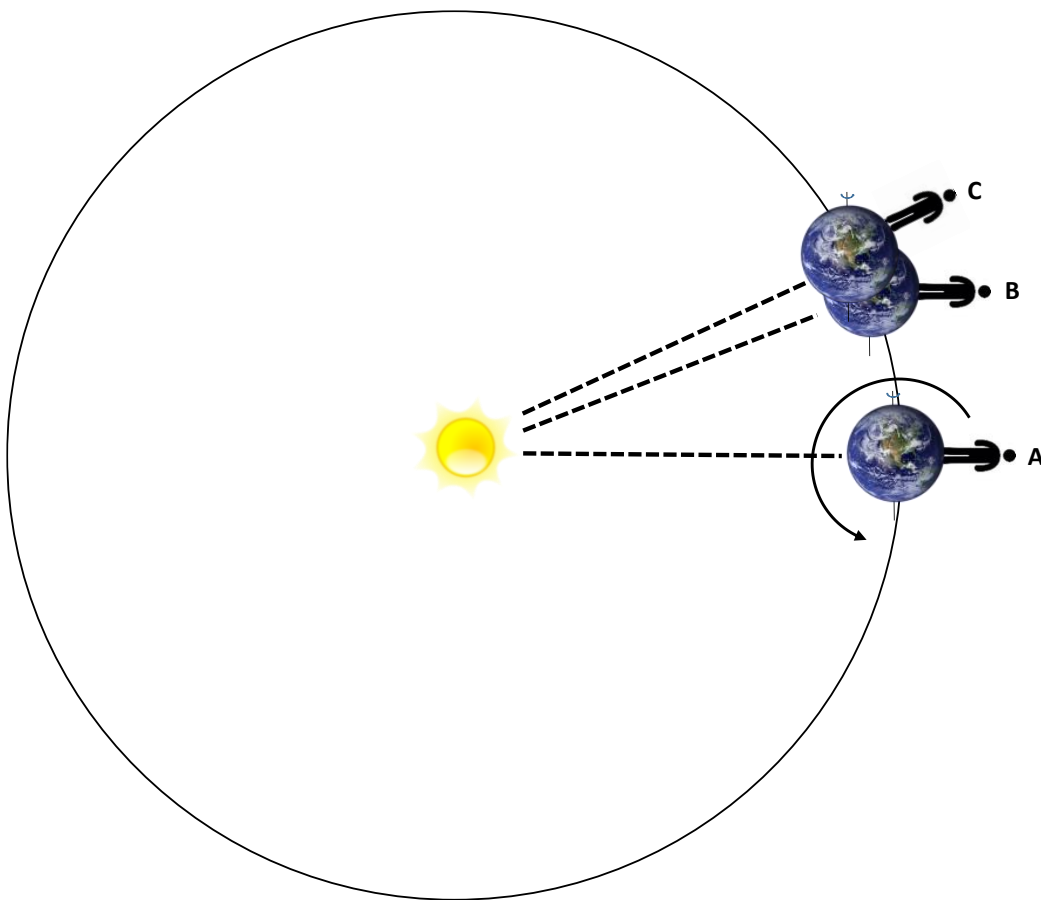
La aceleración y la forma del movimiento de un cuerpo alrededor del sol no dependen de la masa de dicho cuerpo. Y lo mismo sucede evidentemente para cualquier cuerpo que orbite la Tierra o cualquier planeta.

1.5.1. La órbita de un satélite geoestacionario

EJERCICIO:

A qué altura debemos colocar un satélite que gire alrededor de la tierra de manera que siempre esté justo encima de la misma ciudad (la ciudad en este ejemplo está situada en el ecuador de la tierra).

Lo primero que tienes que tener en cuenta es que el tiempo que tarda la tierra en dar una vuelta sobre sí misma no es 24 h. Los que ya han hecho el primer curso saben que 24 h es el ciclo medio de puesta-amanecer-puesta de sol que experimentamos en la Tierra. Pero si tenemos en cuenta que la Tierra gira alrededor del sol, lo que tarda la Tierra en girar sobre si misma es menos de 24h.



Si vemos el gráfico, nos damos cuenta de que al pasar de A a B, la Tierra ya ha dado una vuelta completa sobre sí misma. Sin embargo para nosotros todavía no es media noche (en A si era media noche). Tenemos que esperar a llegar a C para que sea media noche de nuevo.

Por tanto la Tierra tarda menos de 24 h en dar un giro completo sobre sí misma.

Dado que la Tierra tarda 365,256 días en dar la vuelta al sol. Es fácil ver en el dibujo que, en dar la vuelta completa alrededor de sí misma, tardará unos minutos menos que en completar un día. ¿Cuánto menos?

$$24 \text{ h} / 365,256 \text{ días} = 3 \text{ minutos y } 56 \text{ segundos} / \text{ día}$$

Por tanto, la Tierra tarda en dar una vuelta completa alrededor de sí misma

$$24 \text{ h} - 3 \text{ minutos y } 56 \text{ segundos} = \mathbf{23 \text{ h, } 56 \text{ m, } 4 \text{ s}}$$

Lo que pretendemos en este ejercicio es que el satélite tarde en dar la vuelta alrededor de la tierra exactamente 23 horas, 56 minutos y 4 segundos (86.152 s)

Es decir su velocidad angular en rad/s será

$$\omega = 2 \pi / (86.152) = 7,29 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

La órbita tiene que ser circular para que esté girando siempre a la misma velocidad. En una órbita circular la fuerza centrífuga debe ser idéntica a la fuerza de la gravedad:

$$m \omega^2 \times D = G \times M_{sol} m / D^2$$

Dado que también sabemos que

$$G \times M_{sol} = 3,99 \times 10^{14}$$

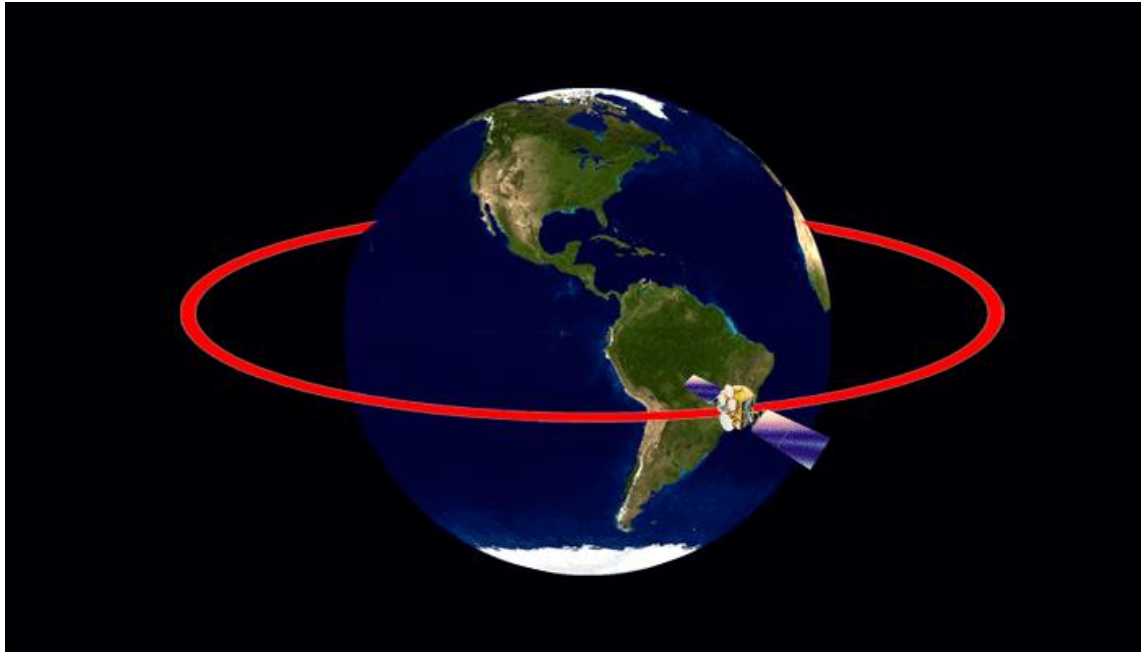
$$G \times M_{sol} = \omega^2 \times D^3$$

De donde obtenemos que $D = 42.167 \text{ Km}$ de altura respecto al centro de la Tierra. O lo que es lo mismo 35.789 Km de altura respecto a la superficie de la Tierra.

Es a esta altura exactamente como se consiguen satélites geoestacionarios. Y no importa la masa del satélite, lo que es clave es que el satélite, cuando esté a esa altura exactamente, consiga, mediante algún empuje externo, una velocidad

$$V = \omega \times D = 2.600 \text{ m/s}$$

De esta manera conseguimos un satélite geoestacionario.



Satélite geoestacionario

En la inmensa mayoría de los casos los satélites viajarán de Oeste a Este, porque de esta manera su lanzamiento es más sencillo ya que se aprovecha la inercia del giro de la tierra hacia el Este y el empuje que hay que darle al satélite es menor.

1.5.2. Cálculo de la velocidad de escape

CALCULAR:

Calcula la velocidad a la que debería salir un proyectil, lanzado desde la Tierra, para lograr escapar a la gravedad terrestre.

Todos hemos tenido la experiencia de lanzar una moneda al aire y ver como cae en nuestra mano. Todos sabemos que cuando llega de nuevo a nuestra mano vuelve con la misma velocidad exacta con la que la lanzamos hacia arriba (obviando el rozamiento del aire).

Lo que pretendemos calcular es ¿a qué velocidad debemos lanzar la moneda al aire para que nunca vuelva?

Primero preguntémonos ¿es eso posible? ¿No es cierto que la moneda se verá siempre frenada por la gravedad y por lo tanto en algún momento detenida y atraída?

En efecto, es cierto que la moneda se verá siempre frenada, pero la fuerza de atracción será cada vez menor, según se aleja de la Tierra, de manera que es posible que la velocidad con la que se aleja sea suficiente para que la fuerza de frenado se debilite rápido (se debilita con el cuadrado de la distancia) y nunca llegue a frenarla del todo.

Fíjate ahora en el siguiente concepto importante. Antes hemos dicho que si tiro una moneda al aire, la velocidad de salida de la moneda es la misma que la velocidad con la que llega cuando vuelve. Si tiro la moneda muy muy muy lejos, el valor de esa velocidad de escape es, en realidad, el mismo cálculo que hallar la velocidad a la que llegaría una moneda a la Tierra si viniera siendo atraída desde el infinito. Calculémoslo.

Sabemos que el trabajo (o energía) que la fuerza de atracción de La Tierra realiza en cada momento al atraer la moneda desde muy muy lejos, se va a ir convirtiendo en energía cinética de la moneda, es decir, en velocidad.

Disculpadme si pongo por primera vez una integral en este curso. Será la última. El sumatorio del trabajo que realiza la fuerza de atracción de la Tierra desde el infinito hasta la superficie de la tierra es:

$$-\int_{\infty}^A F_g \cdot dr = -\int_{\infty}^A \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot dr = G \cdot M \cdot m \cdot \left[\frac{1}{r} \right]_{\infty}^A = \frac{G \cdot M \cdot m}{r_A} = E_{p_A}$$

Siendo r_A el radio de la Tierra, M la masa de la tierra, y m la masa del cuerpo lanzado

Este sumatorio de energía que le da la Tierra en cada instante desde el infinito, debe ser idéntica a la energía cinética que tendrá al llegar a la Tierra:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_e^2 = G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

De donde obtenemos que $v = 11,2 \text{ km/s} = 40.320 \text{ km/h}$

Vemos que el cálculo de la velocidad de escape no depende de la masa. Es decir la velocidad de escape es la misma para cualquier cuerpo, sea cual sea su masa.

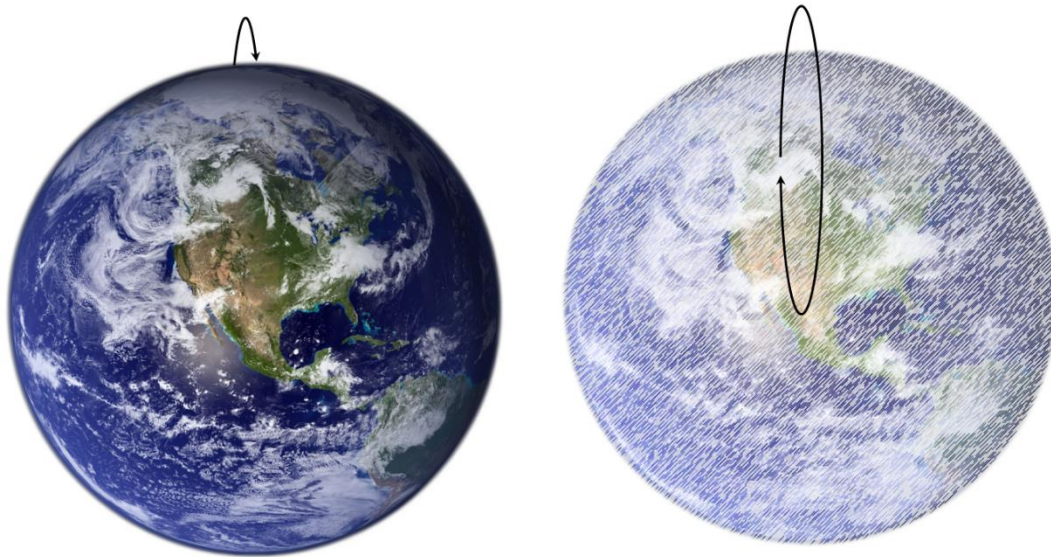
La otra conclusión que sacamos de este ejercicio es que, en ausencia de otras fuerzas, si solo consideramos la atracción gravitatoria terrestre, los cuerpos nunca impactarán a la Tierra con una velocidad superior a 11,2 Km/s, que siempre es un consuelo.

Ya sabemos ahora por qué los científicos consideran que el meteorito que impactó contra la Tierra y formó el cráter Barringer en Arizona se estrelló a una velocidad de aproximadamente 11 km/s. Esto lo comentamos en el primer curso. Pero luego veremos que existen peligros ahí fuera que son en realidad mucho más rápidos y que pueden impactarnos...

1.5.3. Cuerpos en órbita

Otro concepto importante de entender es que, cuando lanzamos un objeto al aire, en realidad siempre lo estamos poniendo en órbita. La intuición de Newton fue precisamente pensar que el tipo de leyes naturales que operan en nuestro mundo son las mismas que las que operan en todo el universo. Es decir, que cuando lanzamos una moneda al aire, la estamos poniendo en órbita durante un breve ratito, y la ley de la gravedad le está afectando del mismo modo en que afecta la Tierra a la Luna.

En efecto, cuando lanzamos una moneda al aire, la moneda está iniciando una órbita elíptica, pero al caer y chocar contra el suelo se interrumpe su viaje. Si el suelo no existiera y toda la masa de la Tierra se concentrara en un punto infinitesimal en su centro de gravedad, la moneda permanecería en órbita toda la eternidad.



Nótese que, contra nuestra primera intuición, la órbita de la moneda no sería descender hasta la antípoda de la Tierra, sino que giraría bruscamente muy cerca del centro de gravedad de la Tierra. La órbita es, en realidad, una elipse realmente alargada con el centro G en uno de sus focos

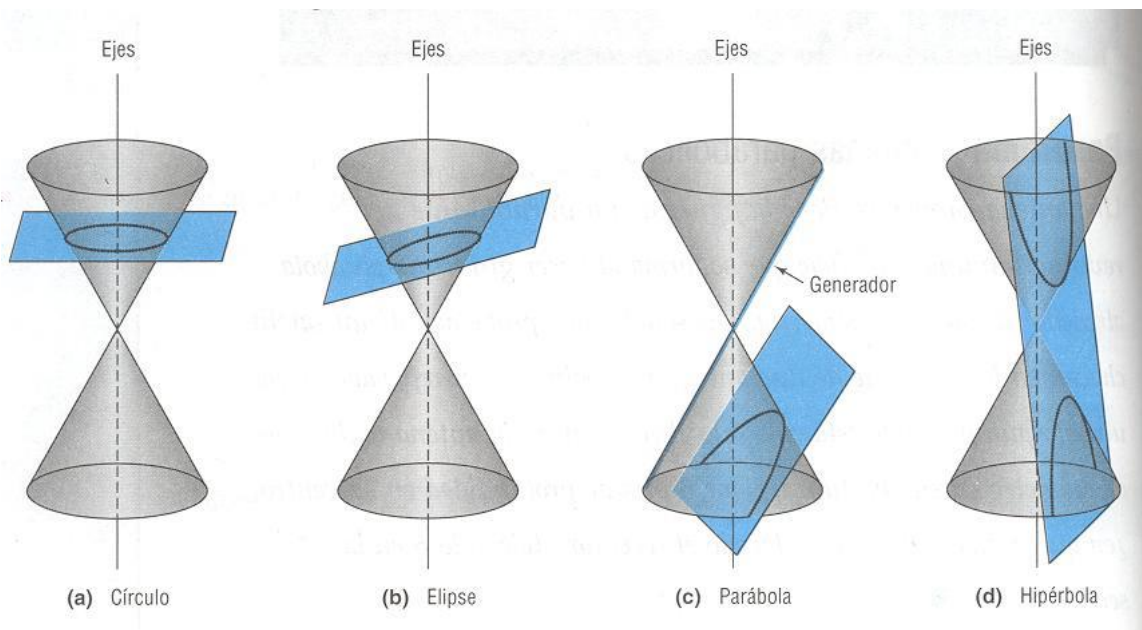
¿Y funcionaría este mecanismo también en el espacio? Si, exactamente igual. Cuando Galileo se empeñaba en intentar explicar que la Tierra giraba alrededor del Sol y que la Luna giraba alrededor de la Tierra, todos le increpaban preguntando ¿por qué la Luna no se cae hacia la Tierra? Y la respuesta era obvia “¡Por supuesto que se cae! ¡Está todo el rato cayendo! Pero elegantemente...”. En efecto, la Luna está eternamente cayendo (igual que la moneda en el caso anterior), pero no llega nunca a impactar a la superficie de la Tierra porque su órbita no la intercepta.

1.5.4. Órbitas elípticas, parabólicas, circulares e hiperbólicas. Las curvas cónicas de Apolonio

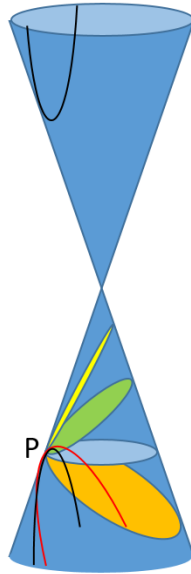
Os pido ahora unos minutos de paciencia. Os prometo que si le dedicáis tres minutos a leer sobre la geometría de las curvas cónicas, podréis captar justo después un pequeño destello de la magnificencia matemática del universo.

Además, estoy convencido de que muchos de vosotros estáis muy interesados en la astronáutica. Todo lo que vamos a explicar ahora es esencial para poder entender el tercer curso de este itinerario, que está dedicado a la astronáutica.

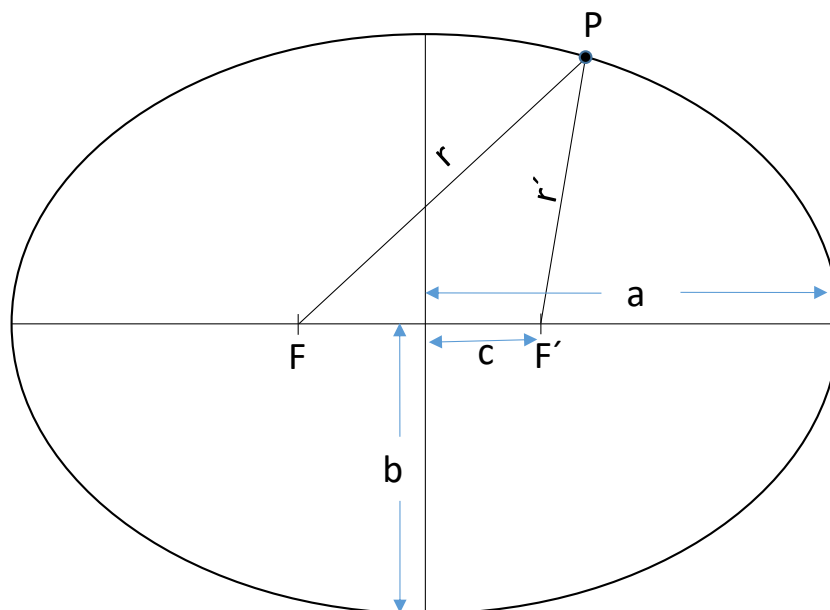
Apolonio era un matemático griego del siglo III a.d.c. Trabajó en Alejandría muchos años y fue famoso por calcular matemáticamente las curvas que surgen al seccionar un cono con un plano (curvas cónicas); elipse, parábola e hipérbola.



Vemos en el dibujo que cuando el plano es perpendicular al eje obtenemos una elipse muy particular, el círculo. Si inclinamos el plano obtenemos una elipse común. Cuando el plano es paralelo al generador del cono, la curva se convierte en una parábola (curva roja en el cono que dibujamos debajo). Por último si seguimos girando el plano de manera que lo ponemos más vertical que el generador del cono obtenemos una hipérbola (curva negra en el cono que dibujamos debajo).



Con este modelo Apolonio fue capaz de definir las propiedades de una elipse.



La elipse se define como el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los focos es constante. Todos los puntos de la elipse cumplen que $r + r' = 2a$

La excentricidad de la elipse se define $e = c / a$

Cuando c es nula los focos coinciden en el centro, y es fácil demostrar que el resultado es una circunferencia (curva azul del cono). Por tanto la circunferencia no es más que una elipse especial (igual que la ballena orca es un delfín especial).

Cuanto mayor es la excentricidad, más alargada es la elipse y más se aleja de la forma circular. A continuación indicamos las excentricidades de las órbitas de los planetas. Destacan Mercurio y Marte. Es ahora fácil de entender por qué las mediciones tomadas por Tycho para la órbita de Marte fueron de tanta utilidad para Kepler.

planeta	excentricidad
Mercurio	0,205 630 69
Venus	0,006 773 23
Tierra	0,016 710 22
Luna	0,054 900 60
Marte	0,093 412 33
Júpiter	0,048 392 66
Saturno	0,054 150 60
Urano	0,047 167 71
Neptuno	0,008 585 87
Plutón	0,248 807 66

¿Qué ocurre si los focos los llevamos casi al extremo de la elipse?

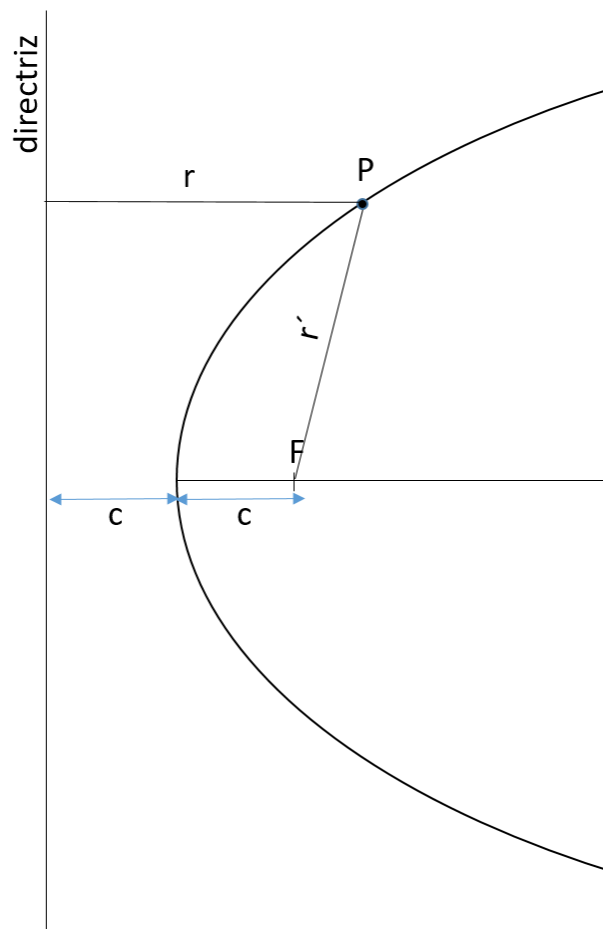
En ese caso la elipse se hace muy alargada (excentricidad muy cercana a 1). Sería el equivalente a la curva amarilla dibujada en el cono. Si los separamos más aún tendremos una elipse tan estrecha que es casi un segmento. Veremos enseguida que todo esto tiene también su equivalente astronómico.

¿Y qué ocurre si el eje mayor de la elipse lo hacemos cada vez más grande?

Si lo alargamos una enorme distancia (de manera que se pueda considerar infinita) estaremos dibujando una parábola. Sería el equivalente a la curva roja.

Las propiedades de la parábola serían por tanto:

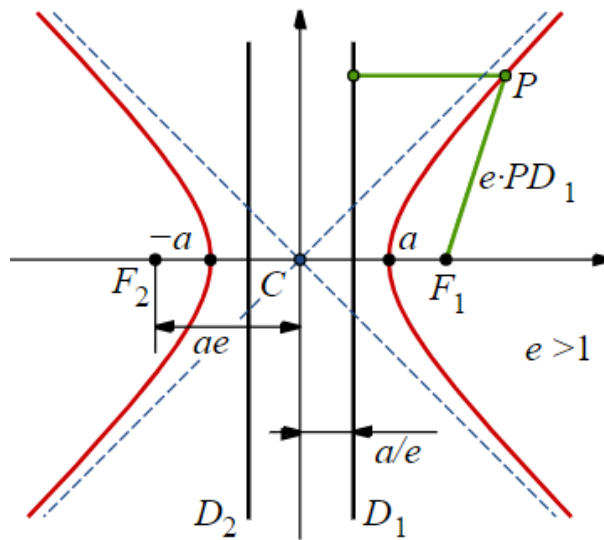
- La excentricidad es 1 porque tanto el semieje de la elipse (a) como la distancia entre los focos (c) se han hecho infinitos. $e=c/a=1$
- La parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta (directriz) y de un punto (foco)



La parábola se genera cuando el plano que corta al cono es totalmente paralelo a la generatriz.

Por último, si el plano que corta al cono lo ponemos aún más vertical que la generatriz del cono, obtenemos una hipérbola (curva negra).

La hipérbola es una parábola en la que el foco que estaba en el infinito aparece ahora por el lado contrario (es como si el universo matemático fuera circular).



Las propiedades de la hipérbola son las siguientes:

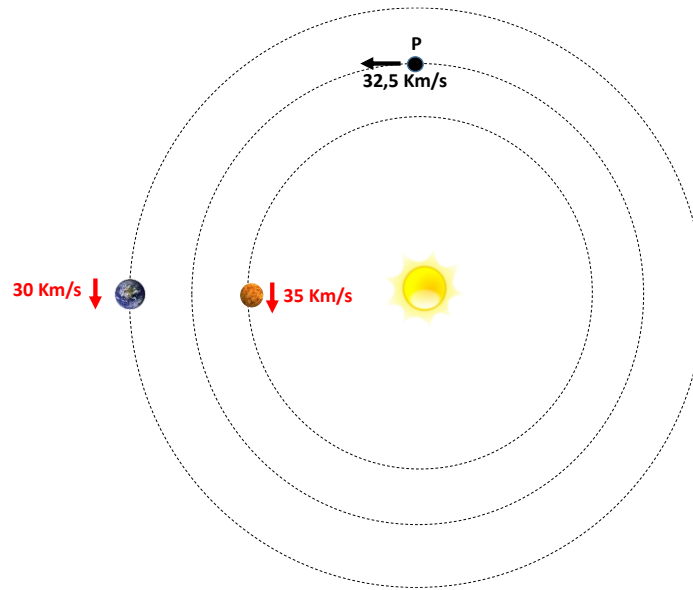
- La excentricidad es mayor que 1.
- Es el lugar geométrico de los puntos P que cumplen que $PF_1 / PD_1 = e$

Estas nociones matemáticas y geométricas nos serán de mucha utilidad más adelante y son las propiedades que utilizó Kepler para encajar los datos astronómicos en órbitas elípticas.

Las órbitas

Volviendo a la forma de las órbitas, ya sabemos que los satélites describen elipses. Pero ¿Por qué a veces la elipse es muy circular y otras veces es muy alargada? ¿Y por qué a veces es una parábola? ¿Puede llegar a ser una hipérbola?

Pensemos primero en la órbita circular por ser la más simple. Imaginemos que estamos en el punto P a una distancia de 125 Millones de km del Sol (es decir entre la órbita de La Tierra y la de Venus).



Si quisiéramos poner en órbita solar un objeto a esa distancia, y quisiéramos que la órbita fuera circular, entonces debemos igualar la aceleración gravitatoria a la aceleración centrífuga. Es decir:

$$\omega^2 \times R = G \times M_{sol}/R^2$$

Es decir,

$$\omega = 2,6 * 10^{-7} \text{ rad/s}$$

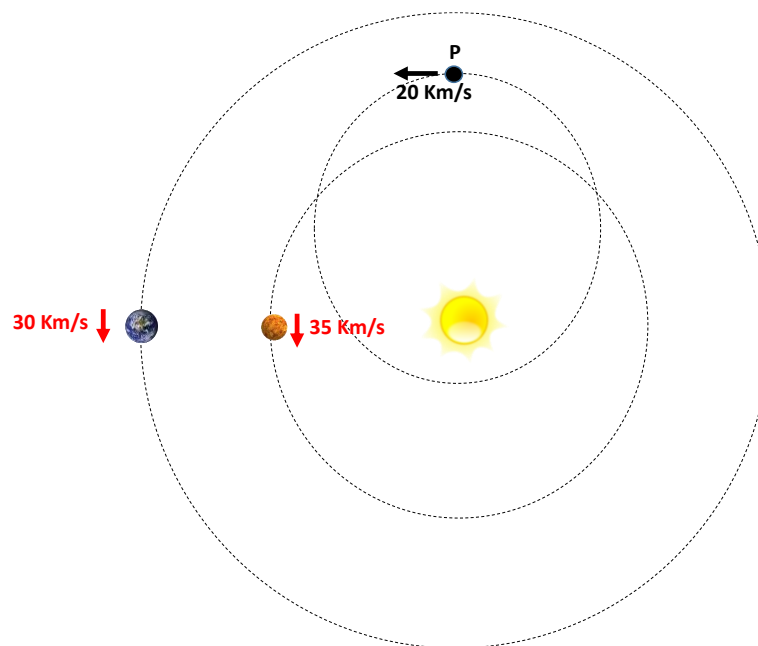
Por tanto la velocidad que debemos darle al objeto (en dirección perpendicular a la dirección del sol) es de $v = \omega \times R = 32,5 \text{ Km/s}$

Si calculáramos la velocidad lineal que llevan Venus, La Tierra y Marte en su giro alrededor del sol, y suponemos órbitas circulares, hallaríamos los siguientes números

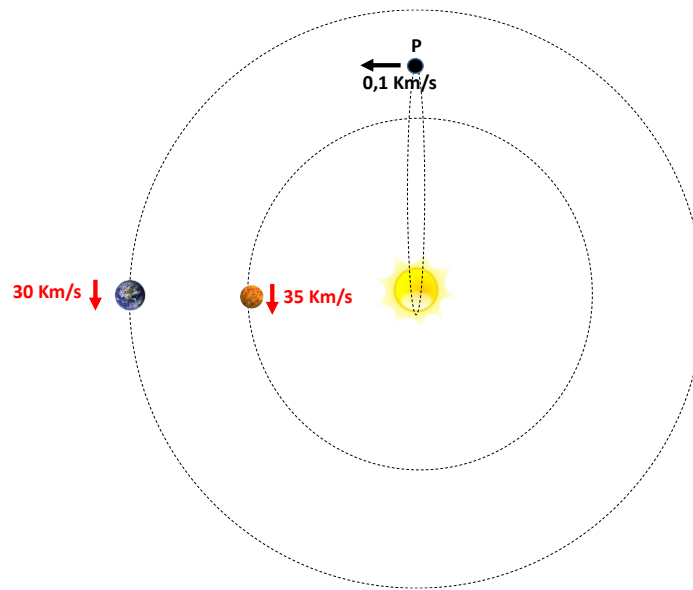
	Velocidad Lineal (km/s)
Venus	35,06
La Tierra	29,79
Marte	24,13

Es decir, cuanto más lejos estamos del Sol, más lentos giran sus planetas (tanto en velocidad angular como en lineal). Esto encaja con la tercera Ley de Kepler.

¿Y qué ocurre si al objeto P le imprimimos una velocidad inferior a 32,5 Km/s? En ese caso entrará en órbita elíptica alrededor del Sol, y el punto P sería el punto más lejano al sol de la elipse. Sería el equivalente a la curva cónica verde.

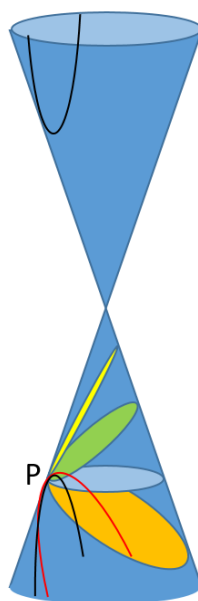


Si la velocidad que le imprimiéramos fuera casi nula, entonces la trayectoria sería una elipse muy alargada que pasaría muy cercana al sol. Es el equivalente matemático a cuando aproximábamos el foco al extremo de la elipse. En efecto, en este caso el cuerpo va a dar la vuelta justo al lado del centro del sol (que será el foco de la elipse). En las curvas cónicas antes dibujadas, esta sería la amarilla.

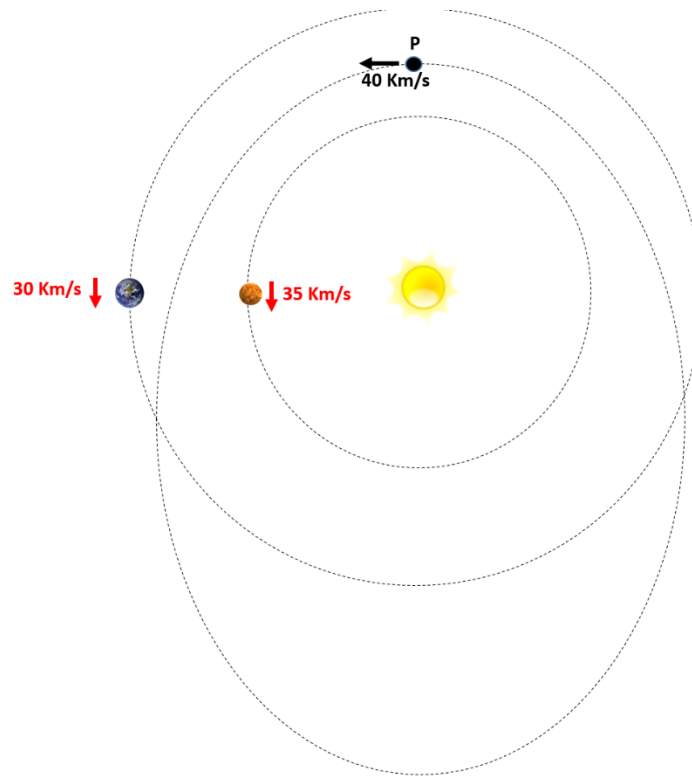


Es decir, según hemos ido dándole menos velocidad inicial hemos ido pasando de la curva azul (circunferencia), a la verde, a la amarilla,...

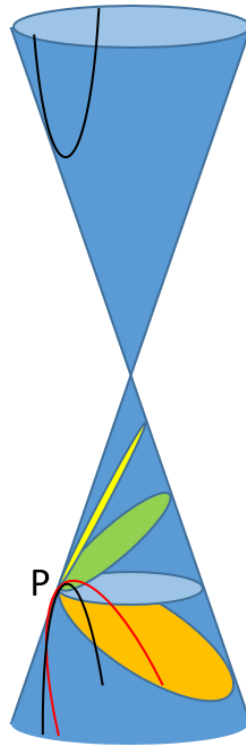
Si no le diéramos velocidad inicial obtendríamos una línea que bajaría directa al sol (coincidiría con la propia línea del generador del cono). En ese caso la curva se hace “imposible” ya que el cuerpo al pasar exactamente por el centro del sol tendría distancia cero, y por tanto la fuerza de atracción sería infinita. Es el equivalente a “dejar caer algo”.



¿Y qué ocurre si al objeto P le imprimimos una velocidad superior a 32,5 Km/s? En ese caso entrará en órbita elíptica alrededor del Sol, y el punto P será el punto más cercano al sol de la elipse. Sería el equivalente a la curva cónica naranja.



Si le diéramos aún más velocidad obtendríamos por fin la parábola (curva roja), esta velocidad se corresponde exactamente con la velocidad de escape en ese punto. Y si le diéramos todavía más velocidad que la de escape obtendríamos la hipérbola negra.



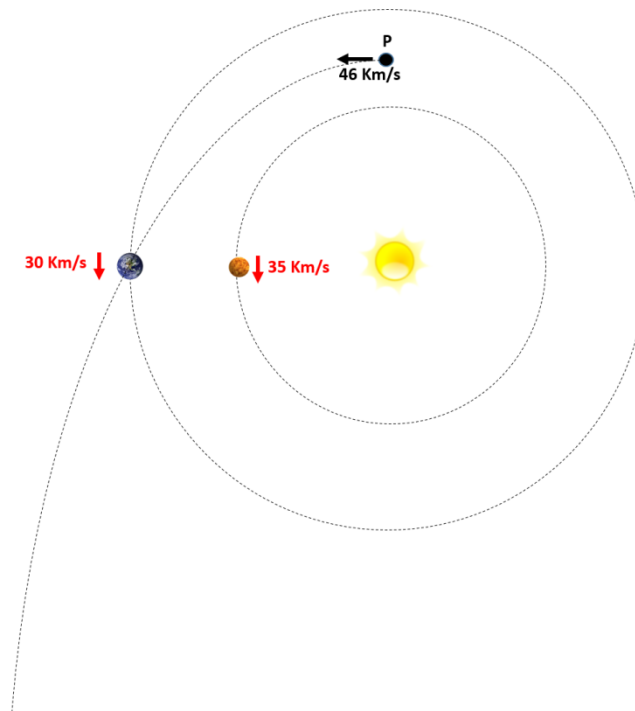
Ahora entendemos por qué, a veces las trayectorias de los astros son circulares, otras veces son elipses más abombadas y otras veces más alargadas. Así que, de nuevo, parece como si el universo estuviera hecho por un gran matemático. ¿Apolonio inventó estas curvas o las descubrió? Habría sido genial poder explicarle que los cuerpos en el espacio obedecen, exactamente, todas estas formas geométricas cónicas. Habría quedado realmente anonadado.

Calculemos cuál es la velocidad que debe tener el punto P para que trace una parábola (velocidad de escape). Ya vimos que para calcular la velocidad de escape debíamos calcular la siguiente fórmula (que equivale a calcular la velocidad que alcanzaría un cuerpo si viniera desde el infinito atraído por el sol):

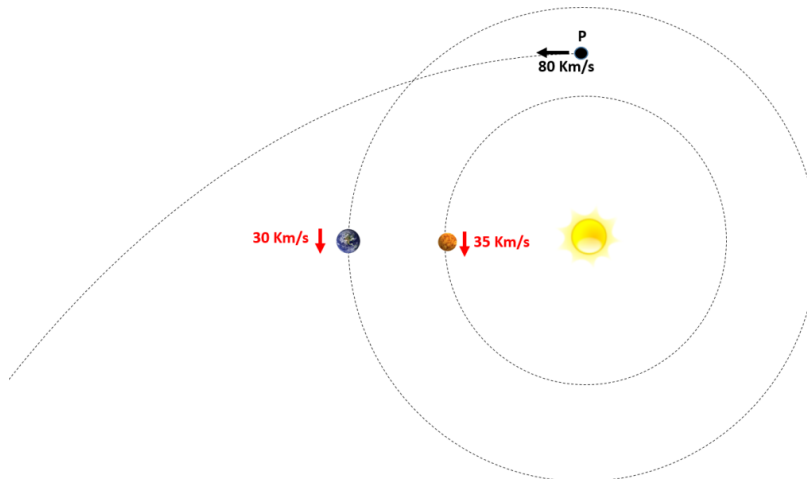
$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_e^2 = G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

En este caso $r = 125$ Millones de Km de distancia al sol

Por tanto la velocidad de escape es 46 Km/s. Si le imprimiéramos esa velocidad al punto P el cuerpo describiría una parábola y jamás volveríamos a verlo. Es verdad que se iría cada vez más lento, pero nunca le volveríamos a ver.



Si la velocidad que le imprimimos es una velocidad superior a la de escape, entonces trazará una hipérbola, y por supuesto tampoco volveríamos a verle.



Los objetos que tienen órbitas muy alargadas (casi parabólicas) son objetos que han sido capturados en órbita por el sol. Si permanecen en órbita es que no son del todo parábolas, son elipses muy alargadas (los cometas).

Pero desde luego se puede dar el caso de objetos que, perdidos por el espacio, llevan una gran velocidad. Proviene de fuera del sistema solar, y son desviados temporalmente por el sol, para luego escapar de nuevo a su influencia gravitatoria (órbitas hiperbólicas).

EJERCICIO:

Queremos enviar desde la Tierra una sonda Voyager al espacio interestelar y asegurarnos de que sale del ámbito gravitatorio solar para que nos envíe datos del espacio. ¿Qué velocidad debemos darle al salir de la atmósfera y en qué dirección?

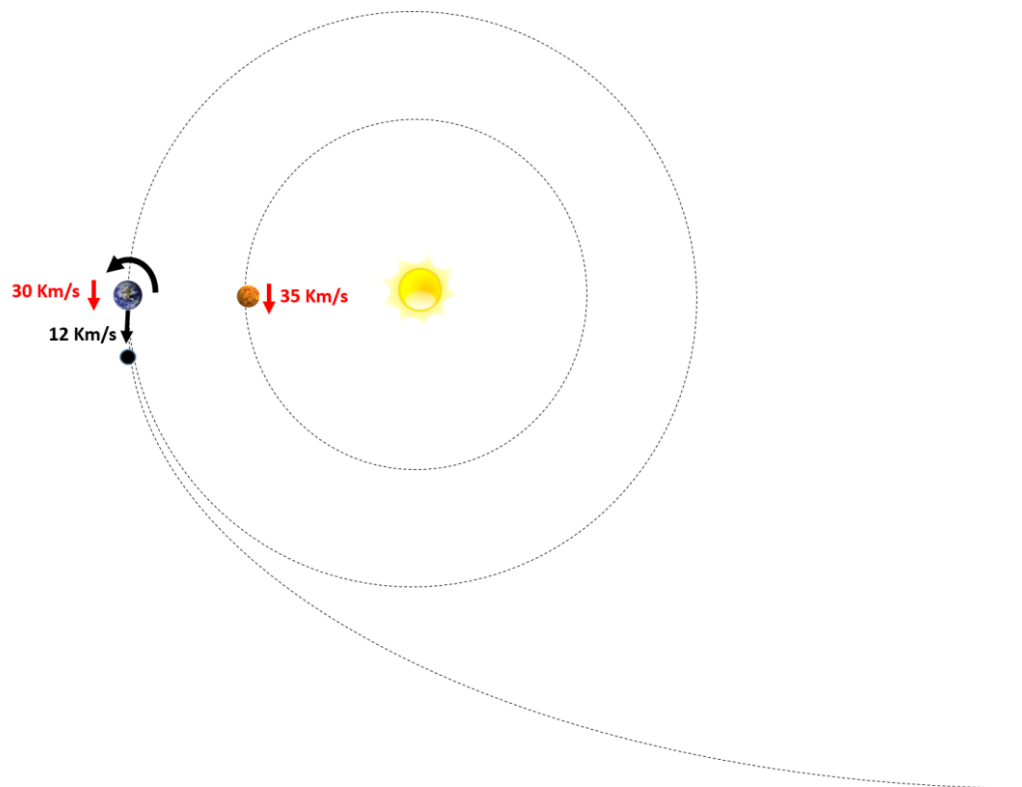
Ya hemos aprendido que, para conseguir que nuestra sonda consiga salir del ámbito de influencia gravitatoria del sol, debemos darle una velocidad igual o superior a la de escape (en este caso nos referimos a la velocidad de escape del campo gravitatorio solar). Por tanto tenemos que calcular cuál es la velocidad de escape de la órbita solar si estamos en la tierra (a 149 M de Km del sol).

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_e^2 = G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

En este caso $r = 149$ Millones de Km de distancia al sol.

La velocidad de escape que resulta es de 42 Km/s.

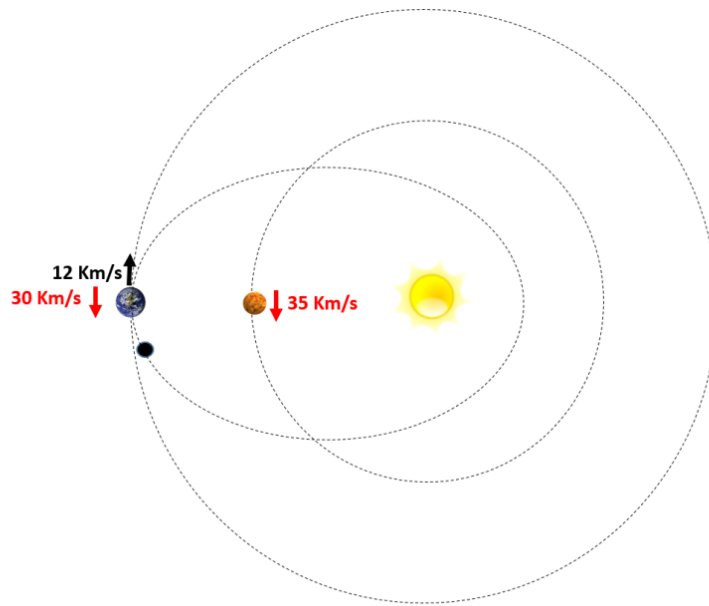
Ya vimos que la Tierra se mueve a una velocidad de translación de 30 Km/s. Por tanto, si le damos a la sonda una velocidad de 12 Km/s en la misma dirección hacia donde se mueve la Tierra, podremos conseguir que ambas velocidades se sumen y podrá alcanzar los 42 Km/s. Además 12 Km/s es justo mayor que los 11,2 km/s que necesitamos para salir de la influencia gravitatoria terrestre.



¿Pero en qué dirección debemos lanzar la sonda para que las velocidades se sumen y no se resten?

Si nos fijamos en el gráfico, hemos marcado el sentido en el que gira la tierra sobre sí misma. Lógicamente debemos lanzar nuestra sonda de manera que se sumen las velocidades, en el mismo sentido en que gira la tierra alrededor del sol.

Si nos equivocáramos y lanzáramos la sonda a 12 Km/s en el sentido contrario, la velocidad que tendría el cohete respecto al sol sería de $30-12=18$ Km/s, una velocidad muy inferior a la que corresponde con una órbita circular de esa distancia, y por tanto la órbita que realizaría sería una elipse con una caída pronunciada hacia el sol:



Fijémonos que, aunque nosotros lo lanzamos en el sentido contrario, el cuerpo describe una órbita en el mismo sentido de giro que la Tierra porque la velocidad de inercia que le da la Tierra (30Km/s) es muy superior a la que nosotros le damos en sentido contrario.

Todo esto que hemos aprendido nos será de mucha utilidad cuando queramos conocer cómo viajar a otros planetas, o incluso si queremos salir al espacio interestelar (curso de astronáutica).

EJERCICIO:

Calculemos la velocidad que lleva el Cometa Halley en el punto en que se encuentra más cerca del Sol

Esta es la órbita que realiza el cometa Halley:



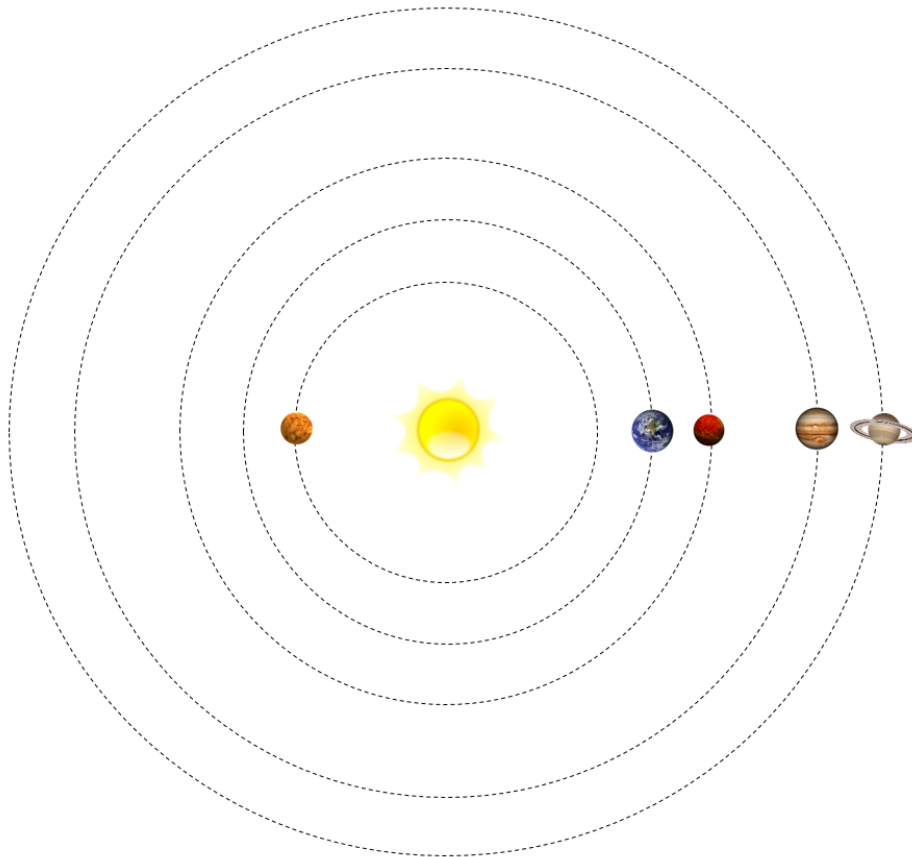
Vemos que viaja realmente lejos, casi hasta alcanzar la órbita de Plutón. Sin embargo cuando se acerca al sol, es casi tangencial a la órbita de Venus.

Dado que se aleja tanto, podemos saber que su velocidad cuando está cercano al sol es casi la velocidad de escape puesto que logra irse realmente lejos. La velocidad de escape en la órbita de Venus (a una distancia del sol de 108 M kms) es de 49 Km/s y, por tanto, esa será aproximadamente la máxima velocidad que alcanza el cometa (cuando está más cercano al sol). Luego según se va alejando va disminuyendo su velocidad hasta que alcanza el punto más lejano y, a partir de ese momento, comienza a ir acelerándose de nuevo.

La órbita es casi equivalente a una parábola dado que el otro extremo de la órbita está tan lejos.

1.5.5. La interacción de los planetas

Imaginemos que existe un momento en la historia del Sistema Solar en que los planetas se encuentran en esta posición tan singular:



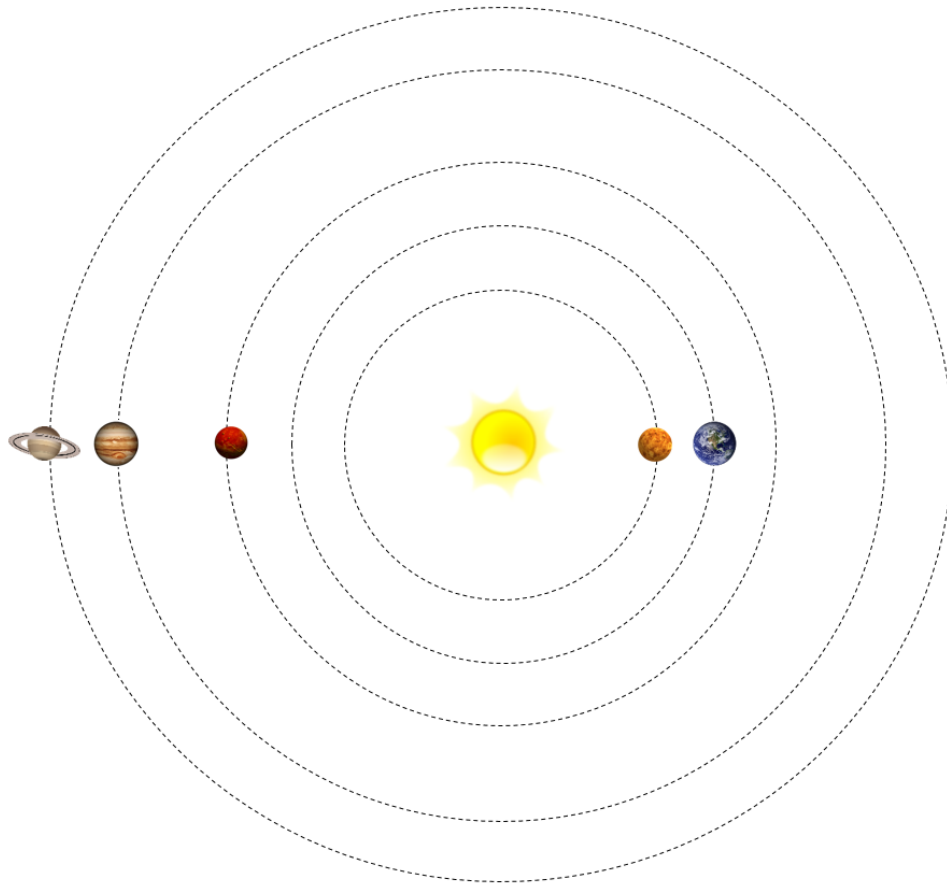
Fijémonos en que, cuando los planetas se encuentran en esta situación, Marte, Júpiter y Saturno están tratando de alejar a La Tierra del Sol. Y Venus, por su parte, que intenta siempre acercarla se encuentra tan lejos que su efecto es muy pequeño.

Veamos, en este caso, cuál es la fuerza de atracción de cada planeta, y cuál es la fuerza resultante final. Incluyamos también en los cálculos a Mercurio (en su posición más lejana) y a Urano y Neptuno (en su posición más cercana)

MAYOR ALEJAMIENTO	Distancia al sol (m)	Distancia a la tierra (m)	Masa (Kg)	G (N/m2,Kg2)	Fuerza de atracción (N)	
LA TIERRA			5,9736E+24			
SOL		1,49598E+11	1,9891E+30	6,674E-11	3,54346E+22	
FUERZA EXTRA:					FUERZA EXTRA:	
MERCURIO	57894376000	2,07492E+11	3,302E+23	6,674E-11	3,05771E+15	
VENUS	1,08E+11	2,57598E+11	4,869E+24	6,674E-11	2,92535E+16	
MARTE	2,2799E+11	78392529000	6,39E+23	6,674E-11	-4,14547E+16	
JUPITER	7,78518E+11	6,28921E+11	1,898E+27	6,674E-11	-1,91305E+18	
SATURNO	1,42673E+12	1,27713E+12	5,683E+26	6,674E-11	-1,38909E+17	
URANO	2,87E+12	2,7204E+12	8,686E+25	6,674E-11	-4,67925E+15	
NEPTUNO	4,49825E+12	4,34866E+12	1,024E+26	6,674E-11	-2,1588E+15	
TOTAL FUERZA EXTRA					-2,071E+18	-0,0058446%

Vemos que, en esta posición de los planetas, es la inmensa masa de Júpiter la que más intenta alejar a la Tierra del Sol. Aun así, a pesar de la ayuda de Marte y Saturno (ayuda muy ligera), el efecto en relación con la fuerza de atracción del sol es solo de un 0,0058%.

Analicemos ahora cuál será la posición de los planetas para que empujen a La Tierra hacia el sol:



En esta posición, el empuje total de atracción de la Tierra hacia el Sol es la suma de todos los efectos:

MAYOR ACERCAMIENTO	Distancia al sol (m)	Distancia a la tierra (m)	Masa (Kg)	G (N/m ² ,Kg ²)	Fuerza de atracción (N)	
LA TIERRA			5,9736E+24			
SOL		1,49598E+11	1,9891E+30	6,674E-11	3,54346E+22	
FUERZA EXTRA:					FUERZA EXTRA:	
MERCURIO	57894376000	91703495000	3,302E+23	6,674E-11	1,56541E+16	
VENUS	1,08E+11	41597871000	4,869E+24	6,674E-11	1,12181E+18	
MARTE	2,2799E+11	3,77588E+11	6,39E+23	6,674E-11	1,78684E+15	
JUPITER	7,78518E+11	9,28116E+11	1,898E+27	6,674E-11	8,78443E+17	
SATURNO	1,42673E+12	1,57632E+12	5,683E+26	6,674E-11	9,11821E+16	
URANO	2,87E+12	3,0196E+12	8,686E+25	6,674E-11	3,7979E+15	
NEPTUNO	4,49825E+12	4,64785E+12	1,024E+26	6,674E-11	1,88981E+15	
TOTAL FUERZA EXTRA					2,09891E+18	0,0059233%

Vemos que, en este caso, es Venus el que más fuerza de atracción realiza por estar muy cerca de La Tierra. Es realmente sorprendente que la fuerza resultante en este caso sea prácticamente idéntica al anterior, pero en sentido contrario (0,0059%), veremos luego la causa.

A pesar de que esta interacción tiene una magnitud de atracción ínfima, el fenómeno de manera repetida y sincronizada puede tener efectos importantes en la excentricidad de la órbita de la Tierra.

Veamos cada cuánto se repite esta posición. Consideremos solo la interacción de Júpiter y Venus sobre la Tierra, puesto que hemos visto que son estos dos planetas los que más fuerza le imprimen. Para calcular esto es muy importante incorporar en los cálculos el tiempo **exacto** que tarda cada planeta en dar la vuelta al sol, porque cualquier error minúsculo se multiplica al pasar miles de años.

	Nº de días
CICLO DE LA TIERRA	365,2563630040
CICLO DE VENUS	224,7006376820
CICLO DE JUPITER	4332,8618333333
CICLO DE SATURNO	10759,96489

Ya hemos aprendido a calcular cada cuánto se encuentran Júpiter y Venus. Basta con calcular cuánto tiempo tiene que pasar para que Venus de exactamente una vuelta más que Júpiter.

Este es el tiempo que debe pasar para que se encuentren Júpiter y Venus: 236,9908995 días.

Y 146.407 encuentros después, esta es la situación

Nº DE CICLOS	NÚMERO DE AÑOS	NUMERO DE DIAS	VUELTAS DE JUPITER	VUELTAS DE VENUS
146407	94.993,9005410	34697126,62	8.007,9005410	154.414,9005410

Vemos que en este momento, exactamente 94.993,9005410 años después, los tres planetas se encuentran exactamente en la misma posición (Tierra, Venus y Júpiter). Porque los tres se han pasado 0,9005410 vueltas respecto a la anterior posición.

Pero veamos cómo queda Saturno ahora (que es el siguiente planeta en influencia sobre la Tierra):

Nº DE CICLOS	NÚMERO DE AÑOS	NUMERO DE DIAS	VUELTAS DE JUPITER	VUELTAS DE VENUS	VUELTAS DE SATURNO
146407	94.993,9005410	34697126,62	8.007,9005410	154.414,9005410	3224,650541

Vemos que Saturno se queda descuadrado.

Por tanto el macro-ciclo de 94.993,90054 es exacto con Júpiter, Venus y la Tierra, pero no con Saturno.

Veamos qué pasa si lo calculamos para cuatro macro-ciclos 94.993 años.

Nº DE CICLOS	NÚMERO DE AÑOS	NUMERO DE DIAS	VUELTAS DE JUPITER	VUELTAS DE VENUS	VUELTAS DE SATURNO
146407	94.993,9005410	34697126,62	8.007,9005410	154.414,9005410	3224,650541
585628	379.975,6021639	138788506,5	32.031,6021639	617.659,6021639	12898,60216

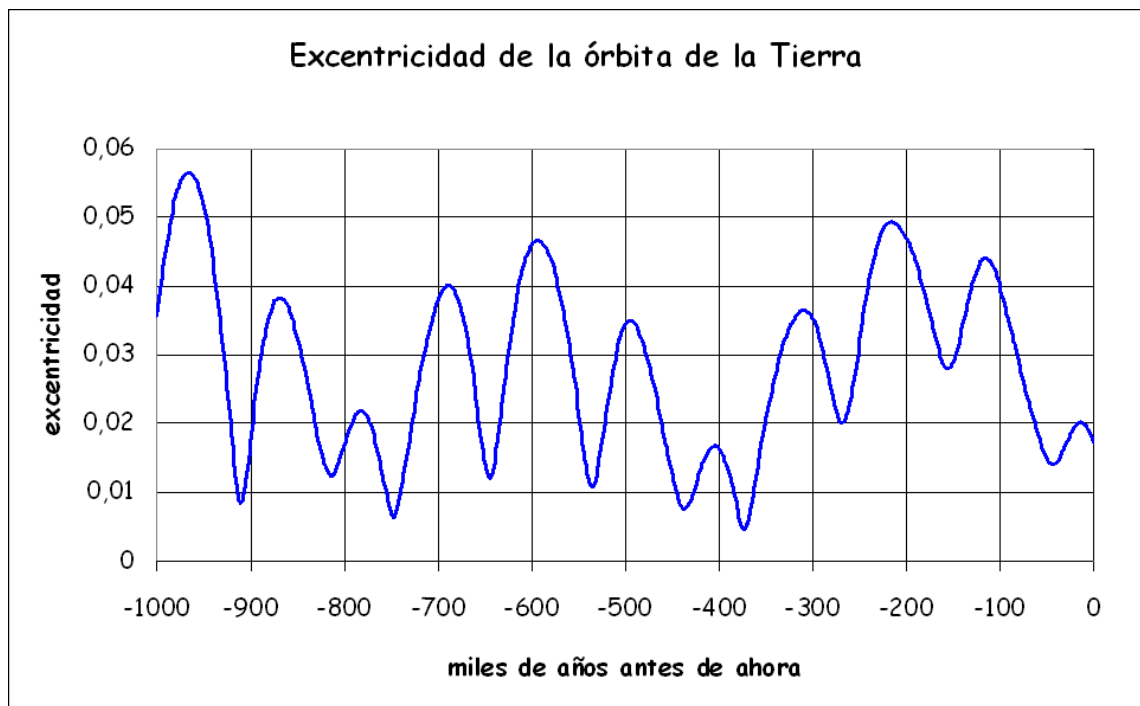
Vemos que ahora están los cuatro planetas exactamente en la misma posición relativa que al inicio.

Es decir, según estos cálculos, cada 94.993 años los planetas Tierra, Venus y Júpiter están en posiciones similares. Y cada 379.975 años también Saturno repite la misma posición que en el origen.

Esto nos sirve **solo a nivel didáctico** porque, como hemos comentado, estos cálculos deben hacerse con la máxima precisión para que los errores no se multipliquen. La duración de los años de cada planeta la necesitaríamos con cifras de más de 8 decimales para que el error acumulado no sea significativo. Además téngase en cuenta que hemos considerado todo el tiempo órbitas circulares como simplificación y, además, igual que estos planetas influyen en la excentricidad de la Tierra, también influyen en la excentricidad de los demás, y el cambio en las excentricidades debe también tenerse en cuenta en todos estos cálculos. Y desde luego también hay que considerar Marte.

Estos efectos de interacciones de los planetas con La Tierra son las que crean una gráfica compleja de la excentricidad de la órbita de la Tierra con una serie de periodos de unos 95.000 años y otra serie más larga de unos 380.000 años.

El efecto resultante es que el semieje mayor de la órbita terrestre se mantiene constante, pero el semieje menor es, a veces un poco más grande, y otras un poco más pequeño, es decir, varía la excentricidad, lo que afecta al clima, como vimos en el curso pasado.



Evolución de la excentricidad de la órbita de la tierra

Ya vimos que los cambios en la excentricidad de la órbita de la Tierra influían de manera determinante en el clima global provocando glaciaciones e interglaciaciones. Es decir, los otros planetas quizás no influyan en nuestra vida diaria (no debemos creer en los horóscopos), pero sin duda tienen una influencia determinante en el clima de la Tierra a largo plazo. (ver [noticia](#))

1.5.6. Resonancia orbital

El concepto de resonancia es importante comprenderlo bien. En realidad lo experimentamos frecuentemente cuando empujamos a nuestro hijo en el columpio. Es importante dar el empujón en el momento adecuado para que el columpio suba cada vez más alto. Si no lo haces en el momento adecuado puedes estar frenándolo.

Por tanto si el empujón se produce con una frecuencia idéntica o múltiplo de la frecuencia del ciclo, se entra en resonancia.

Cualquier cuerpo que gira alrededor del sol mantiene su órbita por toda la eternidad siempre que no tenga interacciones de otros cuerpos.

Pero los planetas están en interacción entre ellos y, en muchos casos, sus posiciones se han ido modificando hasta entrar en determinadas resonancias.

Estas son las interacciones y resonancias orbitales entre ellos:

	Tiempo transcurrido (días)	Ciclo del primero (días)	Ciclo del segundo (días)	Nº de Vueltas del primero	Nº de vueltas del segundo	Cuanto se pasa el segundo (fracción de vuelta)
Venus-Mercurio	2022,31	224,70	87,97	9	23	-0,0108
Tierra-Venus	2922,05	365,26	224,70	8	13	0,0042
Tierra-Venus	88757,21	365,26	224,70	243	395	0,0014
Marte-Venus	779,95	779,95	224,70	1	3	-0,0290
Marte-Tierra	779,95	779,95	365,26	1	2	0,1353
Júpiter-Tierra	4332,86	4332,86	365,26	1	12	-0,1375
Saturno-Júpiter	21519,41	10759,70	4332,86	2	5	-0,0334

Vemos que Venus y Mercurio han encontrado una resonancia orbital de 9:23 vueltas, esto quiere decir que cuando Venus da 9 vueltas, Mercurio da casi exactamente 23 vueltas (en realidad da 22,99). Por su parte, la Tierra y Venus están en una resonancia de 8:13. No es coincidencia que se produzcan estas resonancias. Los planetas varían sus órbitas hasta encontrar órbitas estables de interacción. Especialmente cuanto más cerca están, más interactúan entre ellos.

En el caso de la Tierra vimos cómo la fuerza máxima de alejamiento al sol (que se daba cuando Júpiter, Marte y Saturno se encuentran cerca y Venus lejos y valía -0,0058%) es justo idéntica pero de sentido contrario a la fuerza máxima de acercamiento al sol (que se da cuando Venus está cerca y Marte, Saturno y Júpiter están lejos y valía +0,0058%). Es decir, La Tierra ha encontrado también su órbita “estable” en función de la posición del resto de planetas. Decimos “estable”, pero ya hemos visto que su excentricidad varía. De hecho, a largo plazo (muchos millones de años), su órbita es en realidad impredecible (los cálculos se hacen caóticos).

En la última columna vemos la fracción de vuelta que da el segundo planeta al completar el ciclo. Cuanto más diferente sea este número de 0,00 se tratará de una resonancia menos pura.

La realidad es que, aunque pueda parecer que el Sistema Solar es estable, en realidad no lo es. La interacción entre los planetas es caótica e impredecible al pasar unos cuantos millones de años y no se puede conocer cuál será el movimiento de cada uno de ellos pasado este tiempo.

Las últimas investigaciones con modelos matemáticos potentes parecen suponer que la única explicación a la configuración actual de los planetas gigantes exteriores (Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno) es solo posible debido a la existencia pasada de un quinto planeta gaseoso que acabó escapando al espacio. De hecho, en la mayoría de las simulaciones, el resultado es un sistema inestable en donde algunos de los planetas rocosos actuales deberían haber acabado fuera del sistema solar.

1.5.7. ¿Saturno y Júpiter salvan a la tierra?

Desde 1995 los científicos son capaces de estudiar diferentes planetas que están siendo descubiertos en estrellas cercanas. El análisis de dichos planetas nos está permitiendo saber más acerca de nuestro Sistema Solar. Las conclusiones están resultando sorprendentes, porque nuestro sistema solar no parece ser uno más, más bien parece ser un sistema bastante excepcional.

Muchos de los sistemas estelares se componen de planetas gaseosos que se encuentran extremadamente cercanos a la estrella. Su formación como planetas gaseosos a esa distancia tan corta de su sol habría sido imposible porque los gases habrían escapado a su atracción gravitatoria por su temperatura, por lo que los científicos concluyen que estos planetas han ido derivando y cayendo hacia el sol, posiblemente debido a pérdidas de energía como consecuencia de la interacción y rozamiento con sus propios gases.

¿Pero por qué Júpiter y Saturno no han caído hacia el sol? Según muchos científicos Saturno retiene a Júpiter en su órbita gracias a la resonancia orbital 2:5 que hemos visto en el anterior capítulo. Esto habría evitado que Júpiter hubiera ido destrozando Marte, La Tierra, Venus y Mercurio en su inexorable caída hacia el sol.

De hecho, si hacemos los cálculos de estabilidad de la órbita de Júpiter, como lo hicimos para la Tierra anteriormente, vemos que en efecto Saturno sujeta a Júpiter e incluso tira de él hacia fuera.

CALCULO DE LA ESTABILIDAD DE JUPITER					
MAYOR ALEJAMIENTO	Distancia al sol (m)	Distancia a Jupiter (m)	Masa (Kg)	G (N/m2,Kg2)	Fuerza de atracción (N)
JUPITER			1,898E+27		
SOL		7,785E+11	1,9891E+30	6,674E-11	4,1574E+23
FUERZA EXTRA:					FUERZA EXTRA:
MERCURIO	57894376000	8,36394E+11	3,302E+23	6,674E-11	-5,97912E+16
VENUS	1,08E+11	8,865E+11	4,869E+24	6,674E-11	-7,8481E+17
TIERRA	1,49598E+11	9,28098E+11	5,9736E+24	6,674E-11	-8,78478E+17
MARTE	2,2799E+11	1,00649E+12	6,39E+23	6,674E-11	-7,99032E+16
SATURNO	1,42673E+12	6,48225E+11	5,683E+26	6,674E-11	1,7132E+20
NEPTUNO	4,49825E+12	3,71975E+12	1,024E+26	6,674E-11	9,37463E+17
URANO	2,87E+12	2,0915E+12	8,686E+25	6,674E-11	2,51528E+18
TOTAL FUERZA EXTRA					1,7303E+20 0,0416196%

MAYOR ACERCAMIENTO	Distancia al sol (m)	Distancia a Jupiter (m)	Masa (Kg)	G (N/m2,Kg2)	Fuerza de atracción (N)
JUPITER			1,898E+27		
SOL		7,785E+11	1,9891E+30	6,674E-11	4,1574E+23
FUERZA EXTRA:					FUERZA EXTRA:
MERCURIO	57894376000	7,20606E+11	3,302E+23	6,674E-11	8,05497E+16
VENUS	1,08E+11	6,705E+11	4,869E+24	6,674E-11	1,37191E+18
TIERRA	1,49598E+11	6,28902E+11	5,9736E+24	6,674E-11	1,91316E+18
MARTE	2,2799E+11	-5,5051E+11	6,39E+23	6,674E-11	2,67087E+17
SATURNO	1,42673E+12	2,20523E+12	5,683E+26	6,674E-11	1,48031E+19
NEPTUNO	4,49825E+12	5,27675E+12	1,024E+26	6,674E-11	4,65853E+17
URANO	2,87E+12	3,6485E+12	8,686E+25	6,674E-11	8,26558E+17
TOTAL FUERZA EXTRA					1,96477E+19 0,0047260%

Vemos que las posiciones de los planetas de máxima fuerza de alejamiento consiguen una magnitud casi diez veces superior a la fuerza que se logra en las posiciones de máxima fuerza de acercamiento.

Por otra parte, parece que Saturno y Júpiter pueden tener una labor fundamental en el desvío de los cometas que entran en el sistema solar, protegiendo a La Tierra de sus nocivos impactos, que en el pasado han causado determinadas extinciones en masa. Hace 65 Millones de años la colisión de un asteroide fue la causa más probable de la extinción en masa de los dinosaurios.



La colisión de un gran asteroide es la causa más probable de la extinción de los dinosaurios hace 65 Millones de años

En 1994 un cometa impactó contra la atmósfera de Júpiter. Los restos de la deflagración pudieron ser observados durante varios años en el gran planeta. Es evidente que la inmensa masa de Júpiter afecta a las órbitas de los cometas, bien desviándolas, bien atrayéndoles, bien interceptándoles. Pero es difícil saber hasta qué punto Júpiter está evitando o contribuyendo a la llegada de cometas cerca de nuestro planeta.



Impacto de un cometa en Júpiter, 2009